



ANNALES  
OFFICIELLES  
2013

CONCOURS  
ECRICOME  
PREPA

**ÉPREUVE ÉCRITE**  
**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE**  
OPTION ÉCONOMIQUE

■ **Mathématiques**



**ECRICOME**  
VISER PLUS HAUT

[www.ecricome.org](http://www.ecricome.org)

---

## ESPRIT DE L'ÉPREUVE

---

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

### ■ Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

### ■ Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égales.

### ■ Epreuve

*Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,*

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**SUJET**

**EXERCICE 1**

On désigne par  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par  $0_3$  la matrice nulle de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  ainsi que le polynôme  $R$  défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Pour tout réel  $\lambda$ , on pose  $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ . Pour finir, on introduit l'application  $f$  définie par :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM + MA.$$

1. Montrer que  $R'$  (la dérivée de  $R$ ) admet deux racines réelles distinctes  $r_1, r_2$  avec  $r_1 < r_2$  que l'on précisera.
2. Dresser le tableau de variations de  $R$  en y ajoutant les valeurs de  $R$  en  $r_1$  et  $r_2$ .
3. Justifier que  $R$  admet trois racines  $a, b, c$  avec  $0 < a < r_1 < b < r_2 < c$ . *On ne cherchera pas à calculer ces racines.*
4. Soit  $\lambda$  un réel, calculer  $AX_\lambda$  puis démontrer que  $X_\lambda$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si  $R(\lambda) = 0$ .
5. Etablir l'existence d'une matrice inversible  $P$  et d'une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . Expliciter les matrices  $P$  et  $D$  en fonction des réels  $a, b, c$ .
6. Prouver que  $f$  est une application linéaire et que :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = 0_3 \Leftrightarrow DM' + M'D = 0_3,$$

où l'on a posé  $M' = P^{-1}MP$ .

7. Soit  $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$ . Déterminer les neuf coefficients de la matrice  $DN + ND$ . Que dire de  $N$  si  $DN + ND = 0_3$  ?
8. Démontrer que  $f$  est un isomorphisme.

## EXERCICE 2

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x}.$$

ainsi que la fonction numérique  $f$  des variables réelles  $x$  et  $y$  définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où  $\exp$  désigne la fonction exponentielle.

### I. Etude des zéros de $\varphi$ .

- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , ainsi que la limite de  $\frac{\varphi(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
- Justifier la dérivabilité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et déterminer sa dérivée.
- Dresser le tableau de variation de  $\varphi$  en faisant apparaître les limites de  $\varphi$  en  $0^+$  et  $+\infty$ .
- Prouver l'existence d'un unique réel  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Justifier que  $\alpha \in [1, e]$ .

### II. Etude d'une suite réelle.

On considère la suite  $u$  définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = e ; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n. \end{cases}$$

- Démontrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > \alpha$ .
- Si cette suite est convergente de limite  $L$ , que peut valoir  $L$  ?
- Prouver que la suite  $u$  est strictement croissante.

4. La suite  $u$  est-elle convergente ?
5. Soit  $A$  un réel. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n \geq A$  :

```

program ecricome2013 ;
var n : integer ;
    u : real ;
    A : real ;
function g(x : real) : real ;
begin
g := .....;
end;
begin
writeln('entrer un réel A >0') ;
readln(A) ;
u:=exp(1) ; n:=0 ;
while ..... do
begin
.....;
.....;
end ;
writeln( ..... ) ;
end.
    
```

### III. Extrema de $f$ sur $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que  $f$  possède un unique point critique noté  $A$  d'abscisse  $\alpha$  et d'ordonnée  $y_\alpha$  à déterminer en fonction de  $\alpha$ .
3. Calculer les dérivées partielles secondes sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et établir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, y_\alpha) = \frac{2\alpha + 1}{\alpha^5}.$$

4. La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum local en  $A$  sur l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  ? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

## EXERCICE 3

Soient  $n$  et  $b$  deux entiers avec  $n \geq 1$  et  $b \geq 2$ . On considère une urne contenant  $n$  boules noires et  $b$  boules blanches, toutes indiscernables.

Un joueur  $A$  effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Il laisse alors la place au joueur  $B$  qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

On note  $X$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par  $A$  avant de tirer une boule blanche et on appelle  $Y$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par  $B$  avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc  $Y = 0$ ).

Par exemple, si  $n = 3$  et  $b = 7$  et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- $A$  a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- $B$  a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- $X$  vaut 1 et  $Y$  vaut 4.

### I. Etude d'un cas particulier $b = n = 2$ .

Pour ce cas particulier on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

1. Donner les probabilités des événements :  $[X = 0]$ ,  $[X = 1]$ ,  $[X = 2]$ .
2. En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .
3. Montrer que la probabilité de l'événement  $[Y = 0]$  est donnée par :

$$P([Y = 0]) = \frac{1}{2}.$$

4. Pour tout entier  $i$  naturel non nul, déterminer les probabilités suivantes :

$$P([X = 0] \cap [Y = i]), \quad P([X = 1] \cap [Y = i]), \quad P([X = 2] \cap [Y = i]).$$

5. En déduire la loi de  $Y$ . Uniquement à l'aide de l'expression de  $P([Y = i])$  en fonction de  $i$ , vérifier que :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y = i]) = 1.$$

6. Montrer que  $Y$  admet une espérance et la calculer.

## II. Retour au cas général.

1. Pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , calculer la probabilité  $P([X = k])$  puis vérifier que :

$$P([X = k]) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

2. Utiliser la question qui précède pour justifier que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

Par conséquent, on vient de démontrer la formule suivante :

$$(\mathcal{S}) : \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^N \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}$$

3. Soient  $k \geq 1$ ,  $N \geq 1$  et  $a \in \mathbb{N}$ . Comparer  $k \binom{k+a}{a}$  et  $(a+1) \binom{k+a}{a+1}$  puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^N k \binom{k+a}{a} = (a+1) \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}.$$

4. A l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variable  $n - X$  est donnée par :

$$E(n - X) = \frac{bn}{b+1}.$$

En déduire l'espérance  $E(X)$  de  $X$ .

5. Pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ , et pour tout entier  $i$  non nul, déterminer la probabilité suivante :

$$P([X = k] \cap [Y = i]).$$

6. Pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ , et pour tout entier  $i$ , non nul, justifier que la série  $\sum_{i \geq 1} i \left( \frac{n-k}{n+b-k-1} \right)^{i-1}$  est convergente et déterminer sa somme.

7. Montrer que  $Y$  admet une espérance et vérifier que :

$$E(Y) = \frac{bn}{b^2 - 1}.$$