CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. $R'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right)$. $\Delta = 4^2 - 4 * 3 = 4$ donc $r_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ avec $r_1 < r_2$. Le tableau de variation de R est

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$R'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$R(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2. Applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle $[0,1]$, $[1,3]$, $[3,+\infty[$.

3. $AX_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 6\lambda^2 - 9\lambda + 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}$ donc $AX_\lambda = \lambda X_\lambda$ si et seulement si $\lambda^3 = 6\lambda^2 - 9\lambda + 3 \Leftrightarrow R(\lambda) = 0$. En outre, il est immédiat que $X_\lambda \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. La matrice A possède trois valeurs propres distinctes et elle est de taille 3 donc elle est diagonalisable c'est-à-dire qu'il existe P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Puisque a, b, c sont des valeurs propres distinctes et que X_a, X_b, X_c sont des vecteurs propres associés, on est assuré que la famille (X_a, X_b, X_c) est une famille libre de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ce dernier espace étant de dimension $3 = \operatorname{card}(X_a, X_b, X_c)$, on peut affirmer que (X_a, X_b, X_c) est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On choisit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

5. Pour tous réels λ, μ et toutes matrices $M, N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) + (\lambda M + \mu N) A = \lambda AM + \mu AN + \lambda MA + \mu NA \\ &= \lambda (AM + MA) + \mu (AN + NA) = \lambda f(M) + \mu f(N) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est linéaire. En outre, si on pose $M' = P^{-1}MP \Leftrightarrow PM'P^{-1} = M$, en utilisant le fait que $A = PDP^{-1}$, on a

$$f(M) = 0 \Leftrightarrow AM + MA = 0_3 \Leftrightarrow PDP^{-1}PM'P^{-1} + PM'P^{-1}PDP^{-1} = 0_3$$
$$\Leftrightarrow PDM'P^{-1} + PM'DP^{-1} = 0_3 \Leftrightarrow P(DM' + M'D)P^{-1} = 0_3 \Leftrightarrow DM' + M'D = 0_3$$

car P et P^{-1} sont inversibles.

6. $DN + ND = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2pa & (a+b)q & (a+c)r \\ (a+b)s & 2bt & (b+c)u \\ (a+c)v & (b+c)w & 2cx \end{pmatrix}$.
Donc $DN + ND = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} 2pa = 0 & (a+b)q = 0 & (b+c)u = 0 \\ 2bt = 0 & (a+c)r = 0 & (a+c)v = 0 \\ 2cx = 0 & (a+b)s = 0 & (b+c)w = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = t = x = 0 \\ q = r = s = 0 \\ u = v = w = 0 \end{array} \right.$ car tous les réels $a, b, c, a+b, a+c, b+c$ sont strictement positifs donc non nuls. Autrement dit, on a $N = 0_3$.

7. D'après les questions précédentes, f est un endomorphisme en dimension finie et que son noyau est réduit à $\{0_3\}$ car $f(M) = 0_3 \Leftrightarrow DM' + M'D = 0_3 \Leftrightarrow M' = 0 \Leftrightarrow M = PM'P^{-1} = 0_3$, on peut affirmer que f est un isomorphisme.

EXERCICE 2

I. Etude des zéros de φ.

1. D'après les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln(x) - 1) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$. La courbe représentative de φ possède une asymptote d'équation $x = 0$ quand $x \to 0^+$.

2. $\varphi(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty + 0 = +\infty$, $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0$ donc le graphe de φ possède une branche parabolique de direction (Ox) lorsque $x \to +\infty$.

3. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de telles fonctions et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \varphi'(x) = \left(\ln(x) - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

4.

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\varphi\left(\mathbb{R}_+^*\right) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Puisque $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution. En outre, on a : $\varphi(1) = -1 \leqslant 0,\quad \varphi(\alpha) = 0,\quad \varphi(e) = \frac{e-1}{e} \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(1) \leqslant \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(e) \Rightarrow 1 \leqslant \alpha \leqslant e$ car φ est strictement croissante.

II. Etude d'une suite réelle.

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n)$: « u_n existe et $u_n > \alpha$ ». **Initialisation** $n = 0$. Puisque u_0 existe et que $u_0 = e > \alpha$, $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un entier n alors u_n existe et $u_n > \alpha$ donc $\varphi(u_n)$ existe et $\varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0$ ce qui montre l'existence de $\varphi(u_n) + u_n = u_{n+1}$ et que $u_{n+1} > 0 + u_n > 0 + \alpha = \alpha$. Ainsi $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie ce qui démontre la récurrecen.

2. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la formule $u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n$ et en utilisant la continuité de φ, on a $L = \varphi(L) + L \Leftrightarrow \varphi(L) = 0 \Leftrightarrow L = \alpha$.

3. Pour tout entier n, on a $u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > \alpha > 0$ donc la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.

4. Si elle converge alors sa limite est α et $\alpha > u_0 = e$. Or $\alpha \leqslant e$ ce qui est absurde donc la suite u n'est pas convergente.

5.

```
program ecricome2013;
var n : integer;
    u : real ;
    A : real ;
  function g(x : real) : real ;
  begin
  g := (x*ln(x)-1)/x+x;
  end;
begin
    writeln('entrer un réel A >0');
    readln(A);
    u:=exp(1); n:=0;
    while u<A do
      begin
        n := n+1;
        u := g(u);
      end;
writeln(n) ;
end.
```

III. Extrema de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

1. f est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) et composée de fonction de classe C^2 donc elle est de classe C^2 sur l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{x^3} + \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{x} + y$. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = y \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = y \\ -\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 1 = x\ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \varphi(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x^4}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^3}y + \frac{6}{x^4}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 1$. D'après la question précédente, l'équation $\varphi(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ donc on a $\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$ d'où l'égalité $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^5} - \frac{2}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^4} + \frac{6}{\alpha^4} = \frac{1}{\alpha^5} + \frac{2}{\alpha^4} = \frac{1+2\alpha}{\alpha^5}$.

4. Si l'on pose $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{1+2\alpha}{\alpha^5}$, $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)=1$, $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{1}{\alpha^2}$, on a $rt-s^2=\dfrac{\alpha+1}{\alpha^5}>0$ avec $r>0$ donc f présente un minimum local en A.

EXERCICE 3

On notera N_k (resp. B_k) l'événement : « piocher une boule noire (resp. blanche) au k-ième tirage ».

I. Etude d'un cas particulier $b=n=2$.

1. $P(X=0)=P(B_1)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, $P(X=1)=P(N_1\cap B_2)=P(N_1)P_{N_1}(B_2)=\dfrac{2}{4}*\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,
$P(X=2)=P(N_1\cap N_2\cap B_3)=P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(B_3)=\dfrac{2}{4}*\dfrac{1}{3}*\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{6}$.

2. $E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2}kP(X=k)=P(X=1)+2P(X=2)=\dfrac{2}{3}$,
$E\left(X^2\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2}k^2P(X=k)=P(X=1)+4P(X=2)=1\Rightarrow V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\dfrac{5}{9}$

3. $(Y=0)=(B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap B_2\cap B_3)\cup(N_1\cap N_2)$ donc, en utilisant que les événements entre parenthèse sont incompatibles et la formule de conditionnement, on a : $P(Y=0)=\dfrac{2}{4}*\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{4}*\dfrac{2}{3}*\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

4. $(X=0)\cap(Y=i)=B_1\cap\underbrace{N_2\cap\cdots\cap N_{i+1}}_{i\text{ tirages de noires}}\cap B_i\Rightarrow P((X=0)\cap(Y=i))=\dfrac{2}{4}*\left(\dfrac{2}{3}\right)^i*\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^i$
, $(X=1)\cap(Y=i)=N_1\cap B_2\cap\underbrace{N_3\cap\cdots\cap N_{i+2}}_{i\text{ tirages de noires}}\cap B_{i+3}\Rightarrow P((X=1)\cap(Y=i))=\dfrac{2}{4}*\dfrac{2}{3}*\left(\dfrac{1}{2}\right)^i*\dfrac{1}{2}=$
$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i$ et $P(X=2)\cap(Y=i)=\emptyset\Rightarrow P((X=2)\cap(Y=i))=0$.

5. En considérant le système complet d'événements $(X=j)_{0\leqslant j\leqslant 2}$, on a $P(Y=0)=\dfrac{1}{2}$ pour $i\geqslant 1$:
$P(Y=i)=P((X=0)\cap(Y=i))+P((X=1)\cap(Y=i))+P((X=2)\cap(Y=i))=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^i+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i\Rightarrow$
$\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\frac{1}{6}*\frac{2}{3}*\frac{1}{1-\frac{2}{3}}+\frac{1}{6}*\frac{1}{2}*\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i)=P(Y=0)+\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$

6. Les séries $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}i\left(\frac{2}{3}\right)^i=\frac{2}{3}\sum_{i\geqslant 1}i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ et $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}i\left(\frac{1}{2}\right)^i=\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ convergent (séries dérivées de la série géométrique avec $\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}\in\,]-1,1[$) donc la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}\left(\frac{1}{6}i\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{6}i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)$ aussi donc Y admet une espérance $\displaystyle E(Y)=\sum_{i=0}^{+\infty}iP(Y=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}iP(Y=i)=\frac{1}{6}*\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{6}*\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}=\frac{4}{3}.$

II. Retour au cas général.

1. $(X=k)=N_1\cap\cdots\cap N_k\cap B_{k+1}\Rightarrow P(X=k)=\dfrac{n}{b+n}*\dfrac{n-1}{b+n-1}*\cdots*\dfrac{n-k+1}{b+n-k+1}*\dfrac{b}{b+n-k}=$
$\dfrac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{\dfrac{(b+n)!}{(b+n-k-1)!}}*b=\dfrac{n!\,(b+n-k-1)!}{(n-k)!\,(b+n)!}*b$. D'autre part, on a $\dfrac{\dbinom{n-k+b-1}{b-1}}{\dbinom{n+b}{b}}=\dfrac{\dfrac{(n-k+b-1)!}{(b-1)!\,(n-k)!}}{\dfrac{(n+b)!}{b!n!}}=$

$$\frac{(n-k+b-1)!n!}{(n-k)!\,(n+b)!}*\frac{b!}{(b-1)!}=\frac{(n-k+b-1)!n!}{(n-k)!\,(n+b)!}*b=P\,(X=k)\,.$$

2. Puisque $X\,(\Omega)=\{0,..,n\}$ et que X est une variable aléatoire, on peut affirmer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P\,(X=k)=1\Leftrightarrow$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}=1\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}\underset{i=n-k}{\Leftrightarrow}\sum_{i=0}^{n}\binom{i+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}$$

3. $\displaystyle k\binom{k+a}{a}=k*\frac{(k+a)!}{a!k!}=\frac{(k+a)!}{a!\,(k-1)!}=(a+1)*\frac{(k+a)!}{(a+1)!\,(k-1)!}=(a+1)\binom{k+a}{a+1}\Rightarrow\sum_{k=0}^{N}\underbrace{k\binom{k+a}{a}}_{=0\text{ quand }k=0}=$
$$\sum_{k=1}^{N}k\binom{k+a}{a}=\sum_{k=1}^{N}(a+1)\binom{k+a}{a+1}\underset{\Leftrightarrow k=j+1}{\overset{j=k-1}{=}}(a+1)\sum_{j=0}^{N-1}\binom{j+a+1}{a+1}$$

4. D'après le théorème de transfert, on a : $\displaystyle E\,(n-X)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\,P\,(X=k)=\frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n-k+b-1}{b-1}$
$$\underset{j=n-k}{=}\frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{j=0}^{n}j\binom{j+b-1}{b-1}=\frac{b}{\binom{n+b}{b}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{j+b}{b}=\frac{b}{\binom{n+b}{b}}\binom{n-1+b+1}{b+1}=\frac{b}{\binom{n+b}{b}}\binom{n+b}{b+1}=$$
$$\frac{b}{\frac{(n+b)!}{b!n!}}*\frac{(n+b)!}{(b+1)!\,(n-1)!}=\frac{bn}{b+1}$$

5. $\displaystyle [X=k]\cap[Y=i]=\underbrace{N_1\cap\cdots\cap N_k}_{k\text{ tirages de noires}}\cap B_{k+1}\cap\underbrace{N_{k+2}\cap\cdots N_{k+i+1}}_{i\text{ tirages de noires}}\cap B_{k+i+2}\Rightarrow P\,([X=k]\cap[Y=i])=$
$$P\,(X=k)\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i}\left(\frac{b-1}{n+b-k-1}\right).$$

6. Puisque $\displaystyle\sum_{i\geqslant1}i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i}=\frac{n-k}{n+b-k-1}\sum_{i\geqslant1}i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ qui est de la série dérivée de la série géométrique de raison $\dfrac{n-k}{n+b-k-1}\in\,]-1,1[$ est convergente et sa somme vaut $\dfrac{n-k}{n+b-k-1}*$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{2}}=\frac{(n+b-k-1)\,(n-k)}{(b-1)^{2}}.$$

7. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=k)_{0\leqslant k\leqslant n}$
$$P\,(Y=i)=\sum_{k=0}^{n}P\,((X=k)\cap(Y=i))=\sum_{k=0}^{n}P\,(X=k)\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i}\left(\frac{b-1}{n+b-k-1}\right)$$

Pour chaque entier $k\in\{0,..,n\}$, la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant1}i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i}=\frac{n-k}{n+b-k-1}\sum_{i\geqslant1}\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ étant convergente, la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant1}iP\,(Y=i)$ est convergente. Ainsi Y admet une espérance donnée par : $E\,(Y)=$
$$\sum_{i=0}^{+\infty}iP\,(Y=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}iP\,(Y=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}P\,(X=k)\,\frac{b-1}{n+b-k-1}*i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}P\,(X=k)\,\frac{b-1}{n+b-k-1}\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i}=\sum_{k=0}^{n}P\,(X=k)\,\frac{b-1}{n+b-k-1}*\frac{(n+b-k-1)\,(n-k)}{(b-1)^{2}}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}P\,(X=k)*\frac{(n-k)}{(b-1)}=\frac{1}{b-1}E\,(n-X)=\frac{bn}{(b-1)\,(b+1)}=\frac{bn}{b^{2}-1}.$$

RAPPORT

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que près de deux tiers des candidats les abordent désormais.

Avec une moyenne de 10.2 et un écart-type de 4.6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Bien traitée par la grande majorité des candidats.
2. Bien traitée par la grande majorité des candidats.
3. Chez certains candidats règne une confusion entre le théorème de bijection et le théorème des valeurs intermédiaires d'où des hypothèses manquantes ou superflues selon les cas.

4. Il est très souvent oublié qu'un vecteur propre doit être non nul. Souvent l'implication directe est établie mais l'implication réciproque est oubliée (ou non traitée) par une majorité de candidats. Certains candidats tentent de calculer « directement » les valeurs propres sans succès en général ou cherchent des vecteurs propres directement (avec plus de succès).

5. Si les matrices P et D sont correctement devinées par une part importante des candidats, la justification de l'écriture $A = PDP^{-1}$ est rarement mentionnée (critère de diagonalisabilité, formule de changement de base, etc.).

6. La linéarité est majoritairement bien traitée. Pour l'équivalence, trop de candidats se limitent à une implication sans traiter l'autre et sans percevoir qu'ils peuvent travailler par équivalence.

7. Si le calcul de $DN + ND$ est toujours correcte, seule une fraction des candidats devinent que $N = 0$. Une minorité d'entre eux est en mesure de justifier cette dernière égalité.

8. Traitée uniquement par les meilleurs candidats.

EXERCICE 2

I. Etude des zéros de φ.

1. Si la détermination de la limite est convenable par la majorité des candidats, l'interprétation graphique semble poser beaucoup plus de problème.

2. La première limite est obtenue correctement par la majorité des candidats mais pas la seconde. Même remarque quant à l'interprétation graphique.

3. Bien traitée par la grande majorité des candidats.

4. Bien traitée par la grande majorité des candidats.

5. Curieusement, cette question est majoritairement bien traitée, y compris chez ceux qui avaient mal traité la question 3 de l'exercice 1.

II. Etude d'une suite réelle.

1. Question qui s'est avérée relativement sélective car elle nécessitait d'utiliser quelques propriétés de la fonction φ obtenues à la partie précédente. Peu de candidats pensent à inclure l'existence de u_n dans l'hypothèse de récurrence (voire à en parler).

2. Seul un tiers des candidats a fait le lien avec un point fixe ou un zéro de φ. Les justifications correctes (continuité, $L > 0$) sont relativement rares.

3. La plupart des candidats justifie correctement le résultat (les deux tiers), l'autre tiers ne fait pas le lien avec l'étude de φ et ne parvient pas à progresser significativement vers la réponse.

4. Une petite fraction des candidats devine la bonne réponse et donne un argument heuristique. Seuls les meilleurs candidats donne un argumentaire correct.

5. Un tiers des candidats traite bien la question, un sixième propose des éléments substantiels de réponse et près de la moitié des candidats n'aborde pas la question ou ne donne aucun élément significatif de réponse.

III. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

1. Une minorité importante des candidats donne un argumentaire convenable mais une grande majorité se contente d'un mystérieux « comme composée de fonctions C^2 » ou « par théorèmes généraux ». Il est attendu la description précise des opérations effectuées (ici : somme, produit, quotient, composée) sans aller jusqu'à détailler chaque étape.

2. Le calcul des dérivées partielles est généralement correct ainsi que l'écriture du système souhaité. L'expression de y_α en fonction α n'est réussie que par la moitié des candidats et l'unicité de A est menée à bien par un quart d'entre eux.

3. Il y a beaucoup d'erreurs dans le calcul des dérivées secondes, les candidats réussissant à calculer correctement une voire deux dérivées partielles (les plus faciles). Seuls les meilleurs candidats traitent complètement la question.

4. Presque la moitié des candidats n'aborde pas cette question. Parmi ceux qui l'abordent, soit ils donnent une réponse complète convenable (un bon quart), soit ils ne donnent aucun élément significatif à un argumentaire correct.

EXERCICE 3

I. Etude d'un cas particulier $b = n = 2$.

Les questions 1 et 2 sont bien traitées en général. La question 3 est plus sélective : elle est bien traitée par un gros tiers de candidats et les autres ne donnent aucun élément significatif. Les autres questions ne sont traitées que par les meilleurs candidats.

II. Retour au cas général.

A la question 1, peu de candidats sont en mesure de donner un résultat correct à $P([X = k])$ (10 %) mais la moitié d'entre eux vérifie alors la formule proposée. Les questions 2 et 3 sont correctement traitées par un candidat sur cinq. Les autres questions n'étant traitées que par les meilleurs candidats.