



ANNALES
OFFICIELLES
2012

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

ÉPREUVE ÉCRITE
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
OPTION TECHNOLOGIQUE

■ **Mathématiques**



ECRICOME
VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

■ Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

■ Évaluation

Exercices de valeur sensiblement égales.

■ Épreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1} .

(b) On rappelle que $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$,

il existe deux réels u_n, v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$; On vérifiera que :

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n \end{cases}.$$

(c) Exprimer u_n en fonction de n .

(d) Démontrer que : $\forall n \geq 1, \quad v_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k$.

(e) En déduire une expression simplifiée de v_n puis écrire A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

2. Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a, b, c sont trois réels.

(a) Pour tout réel x , calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ s'écrit sous la forme :

$$f'(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)e^{-x}$$

où a_1, b_1, c_1 sont trois réels. Vérifier que : $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

(b) Exprimer $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice A^{-1} .

3. Application. Soient r et s les deux fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = (x + 1)e^{-x} \quad \text{et} \quad s(x) = (x^2 + x)e^{-x}.$$

Déduire de la question précédente une primitive R de r et une primitive S de s .

4. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x < 0, \quad g(x) = 0, \quad \forall x \geq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}.$$

(a) Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $\int_0^x g(x)dx$ et $\int_0^x xg(x)dx$.

(b) En déduire la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} xg(x)dx$ puis donner leurs valeurs respectives.

(c) Prouver que g est une densité de probabilité.

(d) Soit Y une variable aléatoire possédant g pour densité.

Démontrer que Y admet une espérance et donner la valeur de $E(Y)$.

EXERCICE 2.

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative. On définit également la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 \in [1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Etude de $(u_n)_{n \geq 0}$.

(a) Soit $x \geq 1$. Etablir les inégalités suivantes : $1 \leq f(x)$ et $f(x) \leq \frac{x+1}{2}$.

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \frac{u_n + 1}{2}$.

(c) Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)$.

(d) Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et donner la valeur de sa limite.

2. Asymptote à \mathcal{C}_f . On pose $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

- (a) Donner la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (b) Calculer a et b .
- (c) Montrer qu'il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - ax - b = \frac{c}{2x - 1}$$

et donner la valeur de c .

- (d) Prouver que \mathcal{C}_f admet une asymptote (\mathcal{D}) dont on donnera une équation ainsi que la position de (\mathcal{D}) par rapport à \mathcal{C}_f .

3. Variations de f .

- (a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.
- (b) Préciser le sens de variations de f sur $[1, +\infty[$.
- (c) Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) ainsi que la droite (\mathcal{D}) et la tangente (\mathcal{T}) à (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 1.

4. Etude d'une réciproque.

- (a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
- (b) Soit $t \in [1, +\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ (d'inconnue x) admet des solutions réelles et les donner.
- (c) Soit $t \in [1, +\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$.

EXERCICE 3.

On considère deux urnes notées respectivement U et V . On suppose que :

- l'urne U contient deux boules noires et deux boules blanches ;
- l'urne V contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante (\mathcal{E}) : « On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U , on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne U ».

- (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On répète n fois l'expérience (\mathcal{E}) et on note N la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces n tirages dans l'urne U .

- (b) Donner la loi de N en explicitant $P(N = k)$ pour k appartenant aux valeurs prises par N .

- (c) Préciser la valeur de l'espérance $E(N)$ de N ainsi que sa variance $V(N)$.
- (d) Quelle est la probabilité que sur ces n tirages, on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur ?
2. On considère une autre expérience (\mathcal{F}) : « On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U . Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne U . Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne U puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne U soit vide ».
- On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne U soit vide. On désigne par A l'évènement : « au premier tirage dans l'urne U , les deux boules sont de même couleur » et on note a sa probabilité c'est-à-dire $a = P(A)$.
- (a) Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
- (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $P(X = n) = a(1 - a)^{n-2}$.
- (c) Etablir que la variable $Z = X - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
- (d) Donner l'espérance et la variance de Z puis l'espérance et la variance de X .
3. On considère deux réels r, s distincts et non nuls ainsi qu'un réel λ . On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$u_2 = 0, \quad \forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \lambda r^{n-2} + s u_n.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r - s} (r^{n-2} - s^{n-2}).$$

4. On considère une nouvelle expérience (\mathcal{G}) : « On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne V . Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne V . Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne V puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne V soit vide ».
- On note Y le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne V soit vide. On désigne par B l'évènement : « au premier tirage dans l'urne V , les deux boules sont de même couleur » et on note b sa probabilité c'est-à-dire $b = P(B)$.
- (a) Calculer la probabilité b .

- (b) Calculer $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.
- (c) A l'aide du système complet d'évènements (B, \overline{B}) , démontrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$P(Y = n + 1) = bP(X = n) + (1 - b)P(Y = n)$$

- (d) A l'aide de la question 3, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad P(Y = n) = \frac{ab}{b - a} \left((1 - a)^{n-2} - (1 - b)^{n-2} \right)$$

- (e) Calculer la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y = n)$.
- (f) Montrer que Y admet une espérance puis calculer $E(Y)$.