CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n)$: «$U_n = L + A^n(U_0 - L)$».
Initialisation $n = 0$. $L + A^0(U_0 - L) = L + I(U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un certain entier n alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B \underset{(\mathcal{H}_n)}{=} A\left(L + A^n\left(U_0 - L\right)\right) + B \\ &= AL + A^{n+1}\left(U_0 - L\right) + B \underset{AL+B=L}{=} L + A^{n+1}\left(U_0 - L\right) \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Im}(b) &\Leftrightarrow \exists v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad b(v) = u \Leftrightarrow B\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta - 2\gamma = x \\ \alpha - \gamma = y \\ 2\alpha - \beta - \gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) : 3\alpha - \beta - 2\gamma = x \\ (2) : \alpha - \gamma = y \\ 0 = -x + y + z \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 - L_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow u = (x, y, z) \in \operatorname{Im}(b) \Leftrightarrow -x + y + z = 0 \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, on a

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - a) &\Leftrightarrow \exists v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad (\mathrm{Id} - a)(v) = u \\ &\Leftrightarrow (I_3 - A)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = x \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}\gamma = y \\ \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\gamma = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = x \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}\gamma = y \\ 0 = -x + y + z \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 - L_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow u = (x, y, z) \in \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - a) \Leftrightarrow -x + y + z = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut affirmer que $\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - a)$.

3. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc P peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a. On note (e_1, e_2, e_3) cette base de vecteurs propres c'est-à-dire $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, -1, 1)$.

4. D'après les formules de changement de base, on a

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Puisque A est la matrice de a dans la base canonique, D la matrice de a dans la base (e_1, e_2, e_3) et P la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3), on a : $A = PDP^{-1}$. On procède alors par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n)$: «$A^n = PD^nP^{-1}$».
Initialisation $n = 0$. $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un entier n alors

$$A^{n+1} = A^nA \underset{(\mathcal{H}_n)}{=} \left(PD^nP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^nIDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

6. Il est immédiat que

$$\begin{aligned} D^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = E' + \left(\frac{1}{2}\right)^n F' + \left(\frac{1}{3}\right)^n G' \\ \text{avec } E' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^n &= PD^nP^{-1} = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G \\ \text{avec } E &= PE'P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = PF'P^{-1}, \quad G = PG'P^{-1}. \end{aligned}$$

7. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} L' &= DL' + B' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p+1 & \frac{1}{2}q-1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r+1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2}p+1 \\ q = \frac{1}{2}q-1 \\ r = \frac{1}{3}r+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = -2 \\ r = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. Un calcul direct de nouveau :

$$\begin{aligned} L &= PL'P^{-1} = P\left(DL' + B'\right)P^{-1} = PDL'P^{-1} + PB'P^{-1} \\ &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PL'P^{-1}\right) + B = AL + B \end{aligned}$$

9. Par calcul, on a
$$EL = PE'P^{-1}PL'P^{-1} = PE'L'P^{-1} = P0_3P^{-1} = 0_3.$$
car $E'L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 0_3.$

10. En combinant les questions précédentes, on a
$$\begin{aligned} U_n &= L + A^n(U_0 - L) = L + \left(E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G\right)(U_0 - L) \\ &= L + EU_0 - \underbrace{EL}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\right)^n F(U_0 - L) + \left(\frac{1}{3}\right)^n G(U_0 - L) \end{aligned}$$
Si on note
$$L + EU_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad F(U_0 - L) = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}, \quad G(U_0 - L) = \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix}$$
alors $U_n = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{\alpha'}{2^n} + \frac{\alpha''}{3^n} \\ \beta + \frac{\beta'}{2^n} + \frac{\beta''}{3^n} \\ \gamma + \frac{\gamma'}{2^n} + \frac{\gamma''}{3^n} \end{pmatrix}$ et il est immédiat que $\begin{cases} \alpha + \frac{\alpha'}{2^n} + \frac{\alpha''}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha \\ \beta + \frac{\beta'}{2^n} + \frac{\beta''}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\to} \beta \\ \gamma + \frac{\gamma'}{2^n} + \frac{\gamma''}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\to} \gamma \end{cases}$.

EXERCICE 2.

Partie I. Etude d'une fonction f.

1. En utilisant le développement limité à l'ordre 3 de exp, on a :
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6} + o(x^3)\right)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\to} 1$$
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0. En outre, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. En utilisant la question 1, on a
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + (x) \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{2}$$
donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas) et on a
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2} = \frac{e^{-x}(x+1) - 1}{x^2}$$
donc $\varphi : x \mapsto e^{-x}(x+1) - 1$.

4. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme et produit de telles fonctions) et on a
$$\forall x \geqslant 0, \quad \varphi'(x) = -xe^{-x} \leqslant 0.$$
La fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0) = 0$ donc la fonction φ est négative sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent la fonction f' est aussi négative sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (numérateur tend vers 0 et dénominateur vers $+\infty$).

Partie II. Etude d'une suite.

1. Un calcul direct nous donne
$$\begin{aligned}
\forall u \in [0,n], \quad \frac{u}{n} \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{u}{n} \geqslant -1 &\underset{\exp\nearrow}{\Rightarrow} e^{-u/n} \geqslant e^{-1} \\
\underset{1+u>0}{\Rightarrow} \frac{e^{-u/n}}{1+u} \geqslant e^{-1}.\frac{1}{1+u} &\underset{0\leqslant n}{\Rightarrow} \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}du \geqslant \int_0^n e^{-1}.\frac{1}{1+u}du \\
\Leftrightarrow u_n &\geqslant \left[e^{-1}\ln(1+u)\right]_0^n = \frac{\ln(n+1)}{e}.
\end{aligned}$$
(via la croissance de l'intégrale et le fait que l'intégration se fait selon les bornes croissantes). Etant donné que $\dfrac{\ln(n+1)}{e} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on peut affirmer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

2. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ (cf. **I.1**) donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ existe.

3. En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :
$$\int_0^n \frac{1}{1+u}du - u_n = \underbrace{\int_0^n \left(\frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\right)du}_{=J_n}.$$
Etant donné que
$$\begin{aligned}
\forall u \in [0,n], \quad \frac{u}{n} \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{u}{n} \leqslant 0 &\underset{\exp\nearrow}{\Rightarrow} e^{-u/n} \leqslant e^0 = 1 \\
\underset{1+u>0}{\Rightarrow} \frac{e^{-u/n}}{1+u} \leqslant \frac{1}{1+u} &\underset{0\leqslant n}{\Rightarrow} \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}du \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u}du \\
\Leftrightarrow \int_0^n \frac{1}{1+u}du - u_n &\geqslant 0.
\end{aligned}$$
D'autre part, en posant le changement de variable $x = \dfrac{u}{n}$ dans l'intégrale J_n, on a $dx = \dfrac{du}{n} \Leftrightarrow du = ndx$, quand $u = 0$ alors $x = 0$ et quand $u = n$ alors $x = 1$ donc
$$\begin{aligned}
J_n - \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \left(\frac{1-e^{-x}}{1+nx} - \frac{1-e^{-x}}{x}\right)dx \\
&= \int_0^1 \underbrace{\frac{(1-e^{-x})}{x(1+nx)}}_{\geqslant 0}\underbrace{(\overbrace{x}^{\leqslant 0} - \overbrace{1-nx}^{\leqslant 0})}_{\leqslant 0}dx \leqslant 0
\end{aligned}$$
ce qui permet de conclure.

4. Puisque $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+u}du = [\ln(1+u)]_0^n = \ln(n+1)$ et si on note $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ qui est un réel, l'inégalité précédente nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \ln(n+1) - u_n \leqslant I \Leftrightarrow 0 \leqslant 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leqslant \underbrace{\frac{I}{\ln(n+1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1) \end{aligned}$$

EXERCICE 3.

1. L'évènement $\overline{A_n}$ est réalisé si et seulement si les deux premières feuilles piochées soient agrafées. Pour cela, on sélectionne un original parmi les n possibles ($\binom{n}{1}$ choix possibles) et sa copie (aucun choix). Etant donné que l'on pouvait piocher 2 feuilles parmi $2n$ possibles ($\binom{2n}{2}$ choix possibles), on obtient :

$$1 - a_n = P\left(\overline{A_n}\right) = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n-1} \Rightarrow a_n = \frac{2n-2}{2n-1}.$$

2. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on désigne par B_k l'événement «tirer un original et sa copie à la k-ième pioche».

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P\left(\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-2}} \cap B_{k-1} \cap B_k\right) \\ &= \overbrace{P\left(\overline{B_1}\right) \times P_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right) \times \cdots \times P_{\overline{B_2}\cdots\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-3}}}\left(\overline{B_{k-2}}\right)}^{k-2 \text{ facteurs}} \\ &\quad \times P_{\overline{B_2}\cdots\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-2}}}(B_{k-1}) \times P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-2}}\cap B_{k-1}}(B_k) \\ &= \overbrace{a_2 \times a_2 \times \cdots \times a_2}^{k-2 \text{ facteurs}} \times (1-a_2) \times 1 = (a_2)^{k-2}(1-a_2) \end{aligned}$$

   (b) Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$P(S_2 = k) = P(T_2 = k+1) = (a_2)^{k-1}(1-a_2)$$

   donc S_2 suit la loi $\mathcal{G}(1-a_2)$ donc S_2 admet une espérance et une variance donnée par :

$$\begin{aligned} E(S_2) &= \frac{1}{1-a_2} \Leftrightarrow E(T_2 - 1) = \frac{1}{1-a_2} \\ &\Leftrightarrow E(T_2) - 1 = \frac{1}{1-a_2} \Leftrightarrow E(T_2) = 1 + \frac{1}{1-a_2} \\ V(S_2) &= \frac{a_2}{(1-a_2)^2} \Leftrightarrow V(T_2 - 1) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2} \Leftrightarrow V(T_2) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2}. \end{aligned}$$

   Etant donné que $a_2 = \dfrac{2}{3}$, on en déduit que $E(T_2) = 4, \quad V(T_2) = 6$.

3. On conserve les notations de la question 2.

(a) $P(T_3 = 2) = P(\emptyset) = 0$,
$P(T_3 = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1)\, p_{B_1}(B_2)\, p_{B_1 \cap B_2}(B_3) = (1 - a_3)(1 - a_2)\, 1 = (1 - a_3)(1 - a_2)$

(b) En suivant l'indication de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} P(T_3 = k+1) &= P(T_3 = k+1 \cap A_3) + P\left(T_3 = k+1 \cap \overline{A_3}\right) \\ &= P(A_3)\, P_{A_3}(T_3 = k+1) + P\left(\overline{A_3}\right) P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) \\ &= a_3 P(T_3 = k) + (1 - a_3)\, P(T_2 = k). \end{aligned}$$

En effet, $P_{A_3}(T_3 = k+1)$ est la probabilité de vider la boite à la $k+1$-ième pioche sachant que la première pioche n'a pas permis d'agrafer deux feuilles. Autrement dit, à l'issue de la première pioche, il faut vider la boite (qui contient toujours 3 originaux et 3 copies) en k pioches donc cette probabilité vaut $P(T_3 = k)$.
D'autre part, $P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)$ est la probabilité de vider la boite à la $k+1$-ième pioche sachant que la première pioche a permis d'agrafer deux feuilles. Autrement dit, à l'issue de la première pioche, il faut vider la boite (qui contient alors 2 originaux et 2 copies) en k pioches donc cette probabilité vaut $P(T_2 = k)$.

(c) On procède par récurrence sur k.
Initialisation $k = 2$ alors $P(T_3 = k) = 0$ et

$$\frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{2-2} - (a_2)^{2-2}\right] = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}[1 - 1] = 0$$

donc l'initialisation est justifiée.
Hérédité. Supposons la propriété vérifiée au rang k alors

$$\begin{aligned} P(T_3 = k+1) &= a_3 P(T_3 = k) + (1 - a_3)\, P(T_2 = k) \\ &= a_3 \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (1 - a_3)(a_2)^{k-2}(1 - a_2) \\ &= \frac{(1 - a_3)(1 - a_2)}{a_3 - a_2}\left\{a_3\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (a_3 - a_2)(a_2)^{k-2}\right\} \\ &= \frac{(1 - a_3)(1 - a_2)}{a_3 - a_2}\left\{(a_3)^{k-1} - (a_2)^{k-1}\right\} \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

(d) En utilisant la convergence de la série $\sum_n q^n$ quand $|q| < 1$ et en tenant compte que sa somme vaut $\dfrac{1}{1-q}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k) &= \frac{(1 - a_3)(1 - a_2)}{a_3 - a_2} \sum_{k=0}^{+\infty}\left[(a_3)^k - (a_2)^k\right] \\ &= \frac{(1 - a_3)(1 - a_2)}{a_3 - a_2}\left(\frac{1}{1 - a_3} - \frac{1}{1 - a_2}\right) \\ &= \frac{(1 - a_3)(1 - a_2)}{a_3 - a_2}\left(\frac{a_2 - a_3}{(1 - a_3)(1 - a_2)}\right) = 1 \end{aligned}$$

(e) Etant donné que la série $\sum_n nq^{n-1}$ converge quand $|q| < 1$ et en tenant compte que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-q)^2}$, on peut affirmer que les séries

$$\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\,(a_3)^{k-2} \underset{n=k-1}{=} \sum_{n\geqslant 1} n\,(a_3)^{n-1}$$
$$\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\,(a_2)^{k-2} \underset{n=k-1}{=} \sum_{n\geqslant 1} n\,(a_2)^{n-1}$$

sont convergentes donc la série

$$\frac{(1-a_3)\,(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\left((a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right) = \sum_{k\geqslant 2}(k-1)\,P\,(T_3=k)$$

est aussi convergente. Par conséquent, d'après le théorème de transfert, la variable T_3-1 admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E\,(T_3-1) &= \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\,P\,(T_3=k) = \frac{(1-a_3)\,(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left((a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right)\\
&= \frac{(1-a_3)\,(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{j=1}^{+\infty} j\left((a_3)^{j-1}-(a_2)^{j-1}\right) \quad (j=k-1)\\
&= \frac{(1-a_3)\,(1-a_2)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right)\\
E\,(T_3) &= 1+\frac{(1-a_3)\,(1-a_2)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right)
\end{aligned}$$

(f) Avec le même argumentaire que précédente, en utilisant également la convergence de la série $\sum_n n(n-1)q^{n-2}$ quand $|q| < 1$ et en tenant compte que sa somme vaut $\dfrac{2}{(1-q)^3}$ ainsi qu'en utilisant le théorème du transfert, la variable $T_3\,(T_3-1)$ admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E\,(T_3\,(T_3-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\,P\,(T_3=k)\\
&= \frac{(1-a_3)\,(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\left((a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right)\\
&= \frac{(1-a_3)\,(1-a_2)}{a_3-a_2}\left(\frac{2}{(1-a_3)^3}-\frac{2}{(1-a_2)^3}\right).
\end{aligned}$$

En particulier, on est assuré de l'existence de l'espérance pour la variable $T_3\,(T_3-1) = T_3^2 - T_3$. En outre, la variable T_3 admet une espérance donc la variable $(T_3^2 - T_3) + T_3 = T_3^2$ admet une espérance ce qui prouve que T_3 admet une variance.

RAPPORT

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Avec une moyenne de 10 et un écart-type de 5,6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Bien traitée par l'immense majorité des candidats.
2. La définition de l'image d'un endomorphisme est mal comprise par une large part des candidats. Beaucoup de candidat se ramènent à l'équation $b(x) = x$ (valable si b est un projecteur ce qui n'est pas le cas ici) ou $b(x) = 0$ (confusion avec la recherche du noyau). Lorsque la question est correctement abordée, il y a généralement l'oubli récurrent de l'inclusion réciproque (ou de l'égalité des dimensions) pour prouver l'égalité de deux ensembles.
3. Un certain nombre de candidats vérifient seulement que les vecteurs colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres : il fallait encore justifier correctement que ces vecteurs forment une famille libre maximale et donc une base. Peu d'étudiants notent au passage que A est diagonalisable.

4. Généralement, le calcul de D et B' est fait via les images par a et b des vecteurs propres de la base.

5. Attention à bien justifier dans la phase d'hérédité que $A = PDP^{-1}$, si on ne l'a pas fait auparavant.

EXERCICE 2

Partie I. Beaucoup de candidats partent d'un DL d'ordre 2 sur l'exponentielle ce qui est insuffisant compte tenu du quotient par x. Ils ne pensent pas ensuite à effectuer les modifications nécessaires pour donner le DL à l'ordre 2 de f.
Le reste de la partie est souvent bien traité.

Partie II.

1. Elle est souvent abordée par une récurrence ou une intégration par parties. Cette dernière méthode qui ramène à un problème de positivité d'une nouvelle intégrale qui n'est pas bien traitée en général.

2. L'existence de l'intégrale est souvent correctement traitée, il suffisait d'invoquer la continuité de la fonction considérée sur le segment $[0, 1]$.

3. Question correctement traitée lorsqu'elle est abordée.

4. Lorsque l'équivalent est deviné, peu de copies fournissent une justification correcte.

EXERCICE 3

1. Il y a très peu de réponses correctes en raison de fréquentes difficultés à dénombrer.

2. (a) Les candidats se contentent souvent d'une réponse en « français ». L'utilisation d'événements élémentaires et le théorème des probabilités composées sont rarement mentionnés.
   (b) Elle est correctement réussie par les candidats.

3. (a) Le résultat correct est trop peu souvent obtenu.
   (b) Question rarement traitée.
   (c) Un nombre insuffisant de candidats utilise le principe de récurrence.
   d,e,f Lorsque les calculs sur les séries sont abordés, ils le sont généralement correctement.