CORRIGÉ

EXERCICE 1.

1. (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(-x) = e^{-x} - e^{x} = -\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -f(x)$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.

(b) Etant donné que

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0,$$

on peut affirme que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. En outre, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \times \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

et d'après les croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$, on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

2. (a) $f'(x) = e^{x} - (-1)\,e^{-x} = e^{x} + e^{-x}$

(b) D'après le calcul précédent, $f'(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux réels strictement positifs) donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (par imparité).

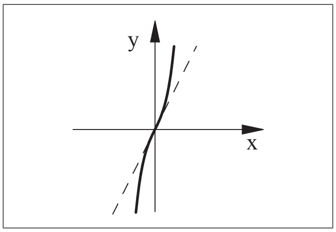
(c) $f(0) = e^{0} - e^{-0} = 1 - 1 = 0$ donc, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} f(x) &> f(0) = 0 \text{ quand } x > 0 \\ f(x) &< f(0) = 0 \text{ quand } x < 0. \end{aligned}$$

(d) D'après le cours, on a $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0) = 2x$.

3. (a) Etant donné que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f''(x) = e^{x} - e^{-x} = f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$, on peut affirmer que f est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

(b) En trait gras, $\mathcal{C}_f$ et en trait fin T (puisque f est concave sur $\mathbb{R}_-$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente T sur $\mathbb{R}_-$ et puisque f est convexe sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente T sur $\mathbb{R}_+$)



4. (a) La fonction f est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, strictement sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \left]-\infty, +\infty\right[$. Comme $n \in \left]-\infty, +\infty\right[$, on peut affirmer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. En outre, comme $f(0) = 0$, on peut affirmer que 0 est la seule solution de $f(x) = 0$ c'est-à-dire que $u_0 = 0$.

(b) Un calcul direct montre que

$$f(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - \frac{1}{e^{\ln(n)}} = n - \frac{1}{n} < n = f(u_n)$$

donc, par stricte croissance de f, on peut affirmer $\ln(n) < u_n$. Etant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = n^2 - 4(-1) = n^2 + 4 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réels $\alpha_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} > 0$ et $\beta_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2} < \dfrac{n-\sqrt{n^2}}{2} = 0$

(d) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= n \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = n \Leftrightarrow t - \frac{1}{t} = n \underset{*t}{\Leftrightarrow} t^2 - 1 = nt \Leftrightarrow t^2 - nt - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} t = \alpha_n \\ \text{ou} \\ t = \beta_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x = \alpha_n > 0 \\ \quad\text{ou} \\ \underbrace{e^x}_{>0} = \beta_n < 0 \quad \text{impossible} \end{array}\right. \Leftrightarrow e^x = \alpha_n \Leftrightarrow x = \ln(\alpha_n) \end{aligned}$$

donc $u_n = \ln\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$.

EXERCICE 2.

PARTIE I.

1. Un calcul direct montre que $N^2 = 0$ donc $\forall k \geqslant 2, \quad N^k = N^2 N^{k-2} = 0N^{k-2} = 0$.

2. (a) Un calcul direct montre que

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + z = a \\ -x - 2z = b \\ y = c \end{array}\right. \underset{2(1)+(2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} x = 2a + b \\ y = c \\ z = -a - b \end{array}\right.$$

donc la matrice P est bien inversible et l'on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Un calcul direct montre que

$$P^{-1}\Delta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

(c) En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} (de part et d'autre de l'égalité), on a : $\Delta = PDP^{-1}$.

(d) Comme $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = \Delta^0$, l'initialisation $n = 0$ est vérifiée. Pour l'hérédité, si la formule est vraie au rang n alors

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n\Delta = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$ et démontre la formule pour tous les rangs n.

(e) Comme D est une matrice diagonale, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et un calcul direct montre que

$$PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Un calcul direct montre que

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N = \Delta N$$

(b) Puisque $A = N + \Delta$ et que N, Δ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton donc

$$\begin{aligned} A^n &= (N+\Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0 \text{ si } k\geqslant 2} \Delta^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k\Delta^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0\Delta^n + \binom{n}{1} N^1\Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, on a

$$A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n & 0 \\ 2-2^{n+1} & -2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PARTIE II.

1. (a) La suite $(z_n)_n$ est constante donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_0 = 1$.

(b) $x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1, \quad y_{n+1} = -2x_n + 2$.

2. (a) Pour tout entier n, on a

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = (3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = x_n + y_n + 1 = r_n + 1$$

donc la suite $(r_n)_n$ est arithmétique de raison 1.

(b) On peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = r_0 + n.1 = (1+1) + n = n + 2 \Leftrightarrow x_n + y_n = n + 2.$$

3. (a) Pour tout entier n, on a

$$s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2(3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = 4x_n + 2y_n = 2s_n$$

donc la suite $(s_n)_n$ est géométique de raison 2.

(b) On peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = s_0 2^n = (2 * 1 + 1)\, 2^n = 3 * 2^n \Leftrightarrow 2x_n + y_n = 3 * 2^n.$$

4. En utilisant les questions 2 et 3, déterminer x_n et y_n en fonction de n. On dispose du système suivant

$$\begin{cases} x_n + y_n = n + 2 \\ 2x_n + y_n = 3 * 2^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = 3 * 2^n - n - 2 & (2) - (1) \\ y_n = 2n + 4 - 3 * 2^n & 2(1) - (2) \end{cases}$$

EXERCICE 3.

Partie I.

1. (a) $P(E) = 0,2; \quad P(A) = 0,8; \quad P_E(T) = 0,5; P_A(T) = 0,375.$

(b) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{E, A\}$:

$$P(T) = P_E(T)P(E) + P_A(T)P(A) = 0,4.$$

(c) On utilise la formule de Bayes :

$$P_T(E) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(E)\, P_E(T)}{P(T)} = 0,25.$$

2. (a) X représente le nombre de succès (un appel concerne du petit électro ménager) dans une série de 10 épreuves identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,2$ c'est-à-dire

$$X(\Omega) = \{0, 1, .., 10\} \text{ et } \forall k \in \{0, .., 10\}, \quad P(X = k) = \binom{10}{k} (0,2)^k (0,8)^{10-k}.$$

(b) D'après le cours on peut affirmer que

$$E(X) = np = 10 * 0,2 = 2, \quad V(X) = np(1-p) = 2 * 0,8 = 1,6.$$

3. (a) Comme précédemment, on peut écrire que Y suit la loi $\mathcal{B}(600; 0,4)$

(b) D'après le cours on sait que la loi normale a pour paramètre

$$m = np = 600 * 0,4 = 240, \quad \sigma^2 = np(1-p) = 240 * 0,6 = 144$$

(c) En posant $Z^* = \dfrac{Z - m}{\sigma} = \dfrac{Z - 240}{12}$ (variable centrée réduite associée à Z), on a :

$$P(Y \leqslant 252) \simeq P(Z \leqslant 252) = P\left(Z^* \leqslant \frac{252 - 240}{12}\right) = P(Z^* \leqslant 1) \simeq 0,8413$$

Partie II.

1. (a) On pose $u = x$, $v' = e^{-x}$ donc $u' = 1$, $v = -e^{-x}$ (par exemple) donc on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A xe^{-x}dx &= \left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^A - \int_0^A 1\left(-e^{-x}\right)dx = -Ae^{-A} + \int_0^A e^{-x}dx \\ &= -Ae^{-A} + \left[-e^{-x}\right]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.\end{aligned}$$

D'après les croissances comparées, on peut affirmer que $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x}dx = 1$.

(b) L'intégrale impropre : $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente et sa valeur vaut 1.

2. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (car les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto xe^{-x}$ sont continues respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$). En outre, on a

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 0 = 0, \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} xe^{-x} = 0$$

donc on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$ c'est-à-dire que f est continue en 0.

(b) La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1 (question **1.b**), l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx$ converge et vaut 0 donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$$

donc f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

3. On suppose que lors d'un appel au standard, le temps de celui-ci en minutes est une variable aléatoire M à densité dont une densité est f.

(a) Par définition, on a pour tout réel t :

$$F(t) = P(M \leqslant t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

Premier cas : si $t < 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, t] \subset \mathbb{R}_-^*$ donc $F(t) = \int_{-\infty}^t 0dx = 0$.

Second cas : si $t \geqslant 0$ alors

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^t f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^t xe^{-x}dx \\ &= 0 + te^{-t} - e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t}(t+1).\end{aligned}$$

(b) i) $P(M \leqslant 4) = F(4) = 1 - 5 * e^{-4}$. iii) $P(2 \leqslant M \leqslant 4) = F(4) - F(2) = 3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}$.

iii) $P_{(M \geqslant 2)}(M \leqslant 4) = \dfrac{P((M \leqslant 4) \cap (M \geqslant 2))}{P(M \geqslant 2)} = \dfrac{P(2 \leqslant M \leqslant 4)}{1 - P(M < 2)}$
$= \dfrac{3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}}{1 - (1 - 3 * e^{-2})} = \dfrac{3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}}{3 * e^{-2}} = 1 - \dfrac{5}{3 * e^{2}}$

4. Soit $A \geqslant 0$, en utilisant l'intégration par parties suivante $u = x^2$, $v' = e^{-x}$, $u' = 2x$, $v = -e^{-x}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{A} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{xf(x)}_{=0}dx + \int_{0}^{A} xf(x)dx = \int_{0}^{A} xf(x)dx = \int_{0}^{A} x^2e^{-x}dx$$

$$= \left[x^2\left(-e^{-x}\right)\right]_0^A - \int_{0}^{A} 2x\left(-e^{-x}\right)dx = -A^2e^{-A} + 2\int_{0}^{A} xe^{-x}dx \underset{A \to +\infty}{\to} -0 + 2 * 1 = 2$$

d'après les croissances comparées et la question **1.b** donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge et vaut 2. Par conséquent, M admet une espérance qui vaut 2.

5. Le coût moyen d'un appel pour un client vaut $E(Z) = 1 + 0,2E(M)$ (par linéarité de l'espérance) $= 1,4$ euros.

RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraissemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Avec une moyenne de 10,1 et un écart-type de 5,1, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1.

L'exercice est modérément réussi par les candidats.

Beaucoup de candidats maitrisent mal les notions concernant les fonctions (parité, branches infinies, etc.). Les candidats donnent très souvent des réponses qui se contredisent ce qui est particulièrement visible lorsqu'ils essaient de construire la courbe représentative de la fonction à travers diverses incohérences.

La plupart des élèves citent le théorème de la bijection pour l'existence de u_n mais rares sont ceux qui l'énoncent et l'utilisent parfaitement.

La reconnaissance de l'équation du second degré est généralement faite, sa résolution aussi mais la quasi-totalité des candidats pensent que $\sqrt{n^2+4} = n+2$, ce qui rend incompréhensible la suite des questions.

EXERCICE 2.

La première partie de cet exercice est assez bien traitée par la grande partie des candidats.

La seconde partie, pourtant sans grande difficulté a été souvent délaissée. On ne peut qu'être déçu par la fréquence de la non reconnaissance d'une suite constante et de l'ignorance des suites arithmétiques et géométriques. Néanmoins les candidats qui sont allés jusqu'à la suite géométrique, n'ont pas eu l'air vraiment gênés de la faute de texte (la suite $(r_n)_n$ ayant été noté $(s_n)_n$), la majorité de ceux-ci rectifient sans même signaler qu'ils ont vu une erreur. On n'obtient quasiment jamais les termes généraux des deux suites.

EXERCICE 3.

Même si on peut noter un relatif progrès dans le nombre de réponses (par rapport aux années précédentes où les exercices de probabilité étaient fréquemment abandonnés), cet exercice est celui qui révèle le plus le décalage entre la compréhension des notions abordées et leur connaissance.

La partie I est celle qui est le mieux réussie, même si de fréquents problèmes de rigueur dans les notations sont à relever avec une reconnaissance convenable des lois binomiales et de l'approximation d'une de ces lois par une loi normale.

La partie II a posé davantage de problèmes par la complexité des notions mathématiques mises en jeu (intégration par parties, continuité d'une fonction, convergence d'intégrale impropre) même si la densité de probabilité est une fonction classique que les candidats ont sans doute étudiée au cours de leur préparation.

La question 4, dans laquelle aucune indication n'était donnée quant à la marche à suivre et visiblement destinée à permettre aux meilleurs candidats de se mettre en valeur, semble avoir parfaitement rempli sa fonction.