CORRIGÉ

EXERCICE 1.

1. (a) Puisque $\forall k \in \{0,..,n\}$, $\deg(P_k) = k$, la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est échelonnée en degré donc libre. En outre, elle est constituée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

   (b) Un calcul direct montre pour $k \geqslant 1$ que :

$$\begin{aligned} P_k'(X) &= \frac{(X-k)^{k-1} + X(k-1)(X-k)^{k-2}}{k!} \\ &= \frac{(X-k)^{k-2}}{k!}\left[(X-k)+(k-1)X\right] \\ &= \frac{(X-k)^{k-2}}{k!} k(X-1) = \frac{(X-k)^{k-2}}{(k-1)!}(X-1) \end{aligned}$$

   d'où l'égalité :

$$P_k'(X+1) = \frac{(X+1-k)^{k-2}}{(k-1)!}X = \frac{X(X-(k-1))^{k-2}}{(k-1)!} = P_{k-1}(X)$$

   En particulier, on obtient :

$$P_k'(X) = P_{k-1}(X-1).$$

   En dérivant cette relation, on a :

$$P_k''(X) = P_{k-1}'(X-1) = P_{k-2}((X-1)-1) = P_{k-2}(X-2)$$

   En dérivant de nouveau la relation, on peut écrire :

$$P_k^{(3)}(X) = P_{k-2}'(X-2) = P_{k-3}((X-2)-2) = P_{k-3}(X-3).$$

   Si l'on fixe $k \in \{1,..,n\}$, une récurrence immédiate sur $j \in \{1,..,k\}$ montre que

$$P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j).$$

   (c) Le polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ et la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on peut affirmer l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$

   En évaluant cette relation en 0 et tenant compte que $P_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$ et $P_0(0) = 1$, on obtient

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k(0) = a_0.$$

   Soit $j \in \{1,..,n\}$. En dérivant j fois la relation $P = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$, on obtient

$$P^{(j)}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k^{(j)}(X)$$

Puisque $\deg(P_k) = k$, si $k < j$ alors $P_k^{(j)} = 0$ donc l'égalité ci-dessus devient :

$$P^{(j)}(X) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_k^{(j)}(X) \Rightarrow P^{(j)}(j) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_k^{(j)}(j) \underset{1\leqslant j\leqslant k}{=} \sum_{k=j}^{n} a_k P_{k-j}(X-j).$$

On évalue alors en j cette relation ce qui nous donne :

$$P^{(j)}(j) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_{k-j}(0) = a_j$$

car $P_{k-j}(0) = 0$ si $k - j \geqslant 1$ et $P_{k-j}(0) = P_0(0) = 1$ si $k - j = 0$.

2. (a) Pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{R}_n[X]$ et tous réels λ, μ, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)'(X+1) = \lambda P'(X+1) + \mu Q'(X+1) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc u est bien linéaire. En outre, puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$ c'est-à-dire que P est un polynôme de degré au plus n, P' est un polynôme de degré au plus $n-1$ donc de degré au plus n ce qui entraine que $P'(X+1) = u(P)$ est un polynôme de degré au plus n. Par conséquent, on vient de montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et comme u est linéaire, on peut affirmer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Si $k = 0$, on a $P_0 = 1$ donc $P_0' = 0$ ce qui montre que

$$u(P_0)(X) = P_0'(X+1) = 0$$

Si $k \in \{1, .., n\}$, on a :

$$u(P_k)(X) = P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

ce qui permet d'écrire la matrice A :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} u(P_0) & u(P_1) & u(P_2) & & & u(P_k) & & & u(P_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{k-1} \\ P_k \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{array}$$

(c) Le rang de la matrice A est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. Etant donné que sa première colonne est nulle et que les autres vecteurs colonnes forment une famille extraite de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que les autres vecteurs colonnes forment une famille libre. Puisqu'ils sont au nombre de n, on en déduit que la matrice A est de rang n.
La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux donc 0 est l'unique valeur propre de A.

(d) Puisque 0 est la seule valeur propre de A, si A est diagonalisable alors il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P\,\mathrm{diag}\,(0, .., 0)\,P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n$$

ce qui est absurde donc A n'est pas diagonalisable.

3. (a) Pour tous les polynômes $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la quantité (P, Q) a bien un sens et l'on a :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)P^{(k)}(k) = \langle Q, P\rangle$$

d'où la symétrie

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)^{(k)}(k)R^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)}(k) + \mu Q^{(k)}(k)\right) R^{(k)}(k)\\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)R^{(k)}(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)R^{(k)}(k) = \lambda \langle P, R\rangle + \mu \langle Q, R\rangle\end{aligned}$$

d'où le caractère linéaire de $P \mapsto \langle P, Q\rangle$ et par symétrie, le caractère linéaire de $Q \mapsto \langle P, Q\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle &= \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(k)\right)^2 \geqslant 0, \quad (P, P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(P^{(k)}(k)\right)^2}_{\geqslant 0} = 0\\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \left(P^{(k)}(k)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P^{(k)}(k) = 0\end{aligned}$$

D'après la question **1.c**, on peut écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k = \sum_{k=0}^{n} 0P_k = 0$$

donc $\langle , \rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) On commence par rappeler que $P_i^{(k)}(X) = 0$ si $k > i$ (car $\deg P_i = i$) donc $P_i^{(k)}(i) = 0$ si $k > i$. Si $k \leqslant i$, d'après la question **1.b**, on a

$$P_i^{(k)}(X) = P_{i-k}(X - k)$$

donc on peut écrire

$$P_i^{(k)}(k) = P_{i-k}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < i\\ 1 \text{ si } k = i\end{cases}$$

Au final, on a $P_i^{(k)}(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i\\ 1 \text{ si } k = i\end{cases}$ donc le produit $P_i^{(k)}(k)P_j^{(k)}(k)$ n'est pas nul si et seulement si lorsque $k = i$ et $k = j$ (ce qui entraine automatiquement que $i = j$). Par conséquent, si $i \neq j$ chacun des produits $P_i^{(k)}(k)P_j^{(k)}(k)$ est toujours nul donc

$$\langle P_i, P_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0 \text{ si } i \neq j$$

Par contre, si $i = j$, on a :

$$\langle P_i, P_i\rangle = \sum_{k \neq i}^{n} \underbrace{P_i^{(k)}(k)P_j^{(k)}(k)}_{=0} + \underbrace{P_i^{(i)}(i)P_i^{(i)}(i)}_{=1*1=1} = 1$$

donc la famille $(P_0, .., P_n)$ est une famille orthonormale et comme c'est une base, on peut affirmer qu'il s'agit d'une base orthonormale de E.

EXERCICE 2

1. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme somme de telles fonctions) et
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{1+t^2-t}{t^2}.$$
Etant donné que le trinôme t^2-t+1 admet un discriminant $\Delta = 1^2 - 4.1 = -3 < 0$ et son coefficient dominant étant strictement positif, on peut affirmer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 - t + 1 > 0 \Rightarrow \psi'(t) > 0.$$
En particulier, la fonction ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\psi(1) = 0$, on en déduit que :
$$\forall t \in]0,1[\,, \quad \psi(t) < \psi(1) = 0, \quad \forall t \in]1,+\infty[\,, \quad \psi(t) > \psi(1) = 0$$

2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$ est convergente (série exponentielle) et la série
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \underset{p=n-1}{=} \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!}$$
aussi. On est assuré de la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ et l'on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

3. Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{1}{t}\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ étant convergente pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ converge et l'on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} - \frac{1}{t^{n-1}} - (n-1)\ln(t)}{n!} \\
&= \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - t\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^n . \frac{1}{n!} - \ln(t)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)}{n!} \\
&= \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right) - t\left(e^{1/t} - 1\right) - \ln(t) = \varphi(t) - \ln(t).
\end{aligned}$$

4. Etant donné que
$$t^{1-1} - \frac{1}{t^{1-1}} - (1-1)\ln(t) = 1 - 1 - 0 = 0$$
et que
$$\begin{aligned}
\forall t &\in]0,1[\,, \quad \forall n \geqslant 2, \quad t^{n-1} \in]0,1[\,, \quad \psi(t^{n-1}) < 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \psi(t^{n-1}) < 0 \Leftrightarrow \varphi(t) - \ln(t) < 0 \Leftrightarrow \varphi(t) < \ln(t) \\
\forall t &\in]1,+\infty[\,, \quad \forall n \geqslant 2, \quad t^{n-1} \in]1,+\infty[\,, \quad \psi(t^{n-1}) > 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \psi(t^{n-1}) > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) - \ln(t) > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) > \ln(t)
\end{aligned}$$

5. Puisque f est de classe C^1 sur l'ouvert U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\exp\left(y\ln(x)\right)-\ln(y)\exp\left(x\ln(y)\right)=0 \\ \ln(x)\exp\left(y\ln(x)\right)-\dfrac{x}{y}\exp\left(x\ln(y)\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}.x^y-\ln(y)y^x=0 \\ \ln(x)x^y-\dfrac{x}{y}.y^x=0 \end{cases}$$

$$\underset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \ln(y)=\dfrac{y}{x}.\dfrac{x^y}{y^x} \\ \ln(x)=\dfrac{x}{y}.\dfrac{y^x}{x^y}=\dfrac{1}{\dfrac{y}{x}.\dfrac{x^y}{y^x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y)>0 \text{ et } \ln(x)>0 \\ \ln(y)\ln(x)=1 \\ \ln(x)\dfrac{x^y}{x}=\dfrac{y^x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \quad y>1 \\ \ln(y)\ln(x)=1 \\ \ln(x)x^{y-1}=y^{x-1} \end{cases}$$

6. Etant donné que $x>1$, il existe $t>0$ tel que $x=e^t$. En outre, on a

$$\ln(x)\ln(y)=1 \Leftrightarrow t\ln(y)=1 \Leftrightarrow \ln(y)=\frac{1}{t} \Leftrightarrow y=e^{1/t}.$$

En composant par le logarithme népérien la dernière égalité de la question précédente, on obtient :

$$\ln(\ln(x))+(y-1)\ln(x)=(x-1)\ln(y) \Leftrightarrow \ln(t)+t(e^{1/t}-1)=\frac{e^t-1}{t} \Leftrightarrow \ln(t)=\varphi(t).$$

7. Puisque l'équation $\varphi(t)=\ln(t) \Leftrightarrow \varphi(t)-\ln(t)=0$ n'admet que $t=1$ pour solution (d'après la question 4 et du fait que $\varphi(1)=0$), on en déduit que $\left(e^1,e^{1/1}\right)=(e,e)$ est l'unique point critique possible de f. En outre, il s'agit bien d'un point critique car

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(e,e)=\dfrac{e}{e}\exp\left(e\ln(e)\right)-\ln(e)\exp\left(e\ln(e)\right)=e^e-e^e=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ln(e)\exp\left(e\ln(e)\right)-\dfrac{e}{e}\exp\left(e\ln(e)\right)=e^e-e^e=0 \end{cases}$$

8. Il est immédiat que pour tout réel t,

$$f(e,e+t)=e^{e+t}-(e+t)^e, \quad f(e+t,e)=(e+t)^e-e^{e+t}=-f(e,e+t).$$

Si (e,e) était un minimum local de f sur U alors, pour t suffisamment petit, on aurait

$$f\left(e,e+t\right)\geqslant f(e,e)=e^e-e^e=0 \Rightarrow f(e+t,e)=-f(e,e+t)\leqslant 0.$$

Or $f(e,e+t)\geqslant f(e,e)=0$ donc $f(e,e+t)=0$ serait nul au voisinage de 0 ce qui est absurde car :

$$\begin{aligned} f(e,e+t) &= 0 \Leftrightarrow e^{e+t}-(e+t)^e=0 \Leftrightarrow e^{e+t}=(e+t)^e \\ &\Leftrightarrow (e+t)\ln(e)=e\ln(e+t) \Leftrightarrow e+t=e\ln(e+t) \\ &\Leftrightarrow 1+\frac{t}{e}=\ln\left(e+t\right)=\ln\left(e\left(1+\frac{t}{e}\right)\right)=\ln(e)+\ln\left(1+\frac{t}{e}\right) \\ &\Leftrightarrow 1+\frac{t}{e}=1+\ln\left(1+\frac{t}{e}\right) \Leftrightarrow \frac{t}{e}=\ln\left(1+\frac{t}{e}\right) \Rightarrow \frac{t}{e}=0 \Leftrightarrow t=0 \end{aligned}$$

(faire une étude de la fonction $x\mapsto x-\ln(1+x)$). Par le même argumentaire, on obtient que (e,e) ne peut être un maximum local de f sur U donc f n'admet aucun extrémum sur U.

PROBLEME

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n

1. (a)
```
var a,b : real;
If X[1] < X[2] then a :=X[2] else a :=X[1]
if a < X[3] then b := X[3] else b :=a;
writeln('max(X[1],X[2] =', a, 'max(X[1],X[2],X[3]) =', b);
end.
```
   (b)
```
var a : real; var k : integer;
a: = X[1];
for k=2 to 2011 do
If a<X[k] then a :=X[k];
writeln('max(X[1],..,X[2011] =', a);
end.
```

2. (a) Etant donné que :

$$\max(X_1,..,X_n) \leqslant t \Leftrightarrow (X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant t)$$

et que les variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes, on est assuré que les événements $(X_1 \leqslant t), .., (X_n \leqslant t)$ sont également mutuellement indépendants ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= P(Y_n \leqslant t) = P((X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant t)) \\ &= P(X_1 \leqslant t)P(X_2 \leqslant t) \cdots P(X_n \leqslant t) = F_{X_1}(t)F_{X_2}(t) \cdots F_{X_n}(t). \end{aligned}$$

   (b) Si $t < 0$ alors

$$\forall i \in \{1,.,n\}, \quad F_{X_i}(t) = 0 \Rightarrow F_{Y_n}(t) = 0.$$

   Si $t \geqslant 0$ alors

$$\forall i \in \{1,..,n\}, \quad P(X_i \leqslant t) = 1 - \exp(-t) \Rightarrow F_{Y_n}(t) = (1 - \exp(-t))^n.$$

   (c) La fonction F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^-} F_{Y_n}(t) &= \lim_{t\to 0^-} 0 = 0 = F_{Y_n}(0), \\ \lim_{t\to 0^+} F_{Y_n}(t) &= \lim_{t\to 0^+} (1-\exp(-t))^n = (1-\exp(0))^n = 0 = F_{Y_n}(0) \end{aligned}$$

   donc $\lim_0 F_{Y_n} = F_{Y_n}(0)$ ce qui assure la continuité de F_{Y_n} sur $\mathbb{R}$. En outre, cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction

$$t \in \mathbb{R}^* \mapsto F'_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ -n\left(-e^{-t}\right)\left(1-e^{-t}\right)^{n-1} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

   est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n donc la fonction f_n est aussi une densité de probabilté de la variable aléatoire Y_n.

3. (a) Pour tout réel t, on a

$$P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leqslant t\right) = P(X_{n+1} \leqslant (n+1)t) = F_{X_{n+1}}((n+1)t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 - e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

(b) La fonction $F_{X_{n+1}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit qu'il en est de même de $t \mapsto F_{X_{n+1}}((n+1)t)$. Par conséquent, la variable $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ admet une densité égale sur $\mathbb{R}^*$ à

$$\left(t \mapsto F_{X_{n+1}}((n+1)t\right)' = (t \mapsto (n+1)f_{n+1}(t)) = t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ (n+1)e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction $d_n : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ (n+1)e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$ est donc une densité de la variable $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

4. On remarque que

$$\int_0^s n.\exp(t)(\exp(t))^{n-1}(1-\exp(-t))^{n-1}\,dt = \int_0^s n.\exp(t)\left[\exp(t)(1-\exp(-t))\right]^{n-1} dt$$

$$= \int_0^s n.\exp(t)\left[\exp(t)-1\right]^{n-1} dt = \int_0^s ((\exp(t)-1)^n)'\,dt = \left[(\exp(t)-1)^n\right]_0^s = (\exp(s)-1)^n.$$

5. Pour $n=1$, la variable $Z_1 = X_1$ admet bien une densité. Supposons la proposition vérifiée pour un certain entier n. Puisque Z_n est une variable aléatoire à densité f_n, que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est également une variable aléatoire à densité et ces deux variables aléatoires sont indépendantes, on en déduit que la variable aléatoire $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ admet une densité h_{n+1} définie par : $h_{n+1} = f_n * d_n$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)d_n(x-t)dt$$

Remarquons que le produit $f_n(t)d_n(x-t)$ est non nul si et seulement

$$\begin{cases} f_n(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0 \\ d_n(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow x-t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant x.$$

Par conséquent, on obtient que $\forall x < 0, \quad h_{n+1}(x) = 0$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) &= \int_0^x f_n(t)d_n(x-t)dt = \int_0^x n.\exp(-t)(1-\exp(-t))^{n-1}(n+1)\exp(-(n+1)(x-t))\,dt \\
&= (n+1)\exp(-(n+1)x)\int_0^x n\underbrace{\exp(-t+(n+1)t)}_{=\exp(nt)}(1-\exp(-t))^{n-1}\,dt \\
&= (n+1)\exp(-(n+1)x)(\exp(x)-1)^n = (n+1)\exp(-x)(\exp(-x))^n(\exp(x)-1)^n \\
&= (n+1)\exp(-x)\left[\exp(-x)(\exp(x)-1)\right]^n = (n+1)\exp(-x)\exp(1-\exp(-x))^n = f_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Autrement dit, on obtient bien que f_{n+1} est une densité de la variable aléatoire Z_{n+1} ce qui achève la récurrence.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle

1. (a) La fonction h est dérivable (comme somme et produit de telles fonctions) et pour tout réel x positif, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\varphi'(x) - \psi'(x)) \exp(-x) - (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x) \\ &= \exp(-x) [\varphi'(x) - \varphi(x) - \psi'(x) + \psi(x)] = \exp(-x) (f(x) - f(x)) = 0 \end{aligned}$$

donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = h(0) \Leftrightarrow \varphi(x) - \psi(x) = h(0) \exp(x)$$

La fonction $\varphi - \psi$ appartenant à E, on en déduit que la fonction $x \mapsto h(0)\exp(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui est impossible sauf si

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow h = 0 \Leftrightarrow \varphi = \psi.$$

2. La fonction $t \mapsto \exp(-t) f(t)$ est continue sur $[x, +\infty[$ et

$$\forall t \in [x, +\infty[, \quad |\exp(-t) f(t)| = \exp(-t) |f(t)| \leqslant |f(t)|.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} |f(t)|\, dt$ étant convergente (car $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge et $x \geqslant 0$), on en déduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} |\exp(-t) f(t)|\, dt$ donc de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$.

3. On commence par remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_f(x) = \exp(x) \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt - \int_0^x \exp(-t) f(t) dt \right).$$

La fonction $t \mapsto \exp(-t) f(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \exp(-t) f(t) dt$ est une primitive de cette fonction donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que la fonction exp. Par conséquent, la fonction k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme et produit de telles fonctions) et l'on a pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned} k_f'(x) &= \exp(x) \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt - \int_0^x \exp(-t) f(t) dt \right) + \exp(x) (-\exp(-x) f(x)) \\ &= k_f(x) - f(x) \Rightarrow k_f(x) - k_f'(x) = f(x). \end{aligned}$$

4. (a) La fonction $t \mapsto \exp(-t)$ étant décroissante sur $\mathbb{R}$,,on a

$$\forall t \in [x, +\infty[, \quad 0 \leqslant \exp(-t) \leqslant \exp(-x) \underset{\times f(t) \geqslant 0}{\Rightarrow} 0 \leqslant \exp(-t) f(t) \leqslant \exp(-x) f(t)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) \leqslant \exp(-x) \int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{\times \exp(x) > 0}{\Rightarrow} 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

Etant donné que $k_f = k_f' + f$, on a :

$$\int_0^A k_f(x)dx = \int_0^A k_f'(x)dx + \int_0^A f(x)dx = [k_f(x)]_0^A + \int_0^A f(x)dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)dx.$$

(b) Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, on est assuré que $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)dt = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} k_f(x) = 0$ (d'après l'encadrement de la question précédente). En outre, on a $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ (car cette dernière intégrale est convergente) donc

$$\begin{aligned}\lim_{A\to+\infty}\left(k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)dx\right) &= -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty} \exp(-x) f(x) + \int_0^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} (1-\exp(-x)) f(x)dx.\end{aligned}$$

La fonction k_f étant continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable sur cet intervalle) et

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1-\exp(-x)) f(x)dx,$$

on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} k_f(x)dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1-\exp(-x)) f(x)dx$$

5. La fonction k_f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad |k_f(x)| = \exp(x)\left|\int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t)dt\right| \leqslant \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)|f(t)|\, dt = k_{|f|}(x).$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} k_{|f|}(x)dx$ étant convergente (d'après la question précédente et le fait que $|f|$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$), on en déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\, dx$.

6. On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une telle densité. Alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge sa valeur est 1. Autrement dit $f \in E$ donc, d'après les

questions précédentes, la fonction g est égale à k_f et est positive. On a alors :

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1-\exp(-x))\, f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx - \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, f(x)dx \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, f(x)dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, f(x)dx = 0.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \exp(-x)\, f(x)$ étant continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \exp(-x)\, f(x) = 0 \underset{\times \exp(x)}{\Rightarrow} f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 \neq 1$$

ce qui est absurde. Par conséquent, il n'existe aucune densité g dérivable sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE III. Etude de $f \mapsto k_f$

1. Si $f \in E$ alors, d'après la partie **II**, $\varphi(f) = k_f \in E$. Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= k_{\lambda f + \mu g}(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, (\lambda f + \mu g)(t)dt \\ &= \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \exp(x) \int_x^{+\infty} (\lambda \exp(-t)\, f(t) + \mu \exp(-t)\, g(t))\, dt \\ &= \lambda \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t)dt + \mu \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, g(t)dt = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x).\end{aligned}$$

   Ainsi φ est linéaire, $\varphi(E) \subset E$ donc φ est un endomorphisme de E.

2. La fonction f_a n'est pas nulle et pour tout réel x positif, on a

$$\begin{aligned}\varphi(f_a)(x) &= \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) \exp(-at)\, dt = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-(1+a)t)\, dt \\ &= \exp(x) \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{\exp(-(1+a)t)}{-(1+a)}\right]_{t=x}^{t=A} = \exp(x) \frac{\exp(-(1+a)x)}{1+a} \\ &= \frac{\exp(-ax)}{1+a} = \frac{1}{1+a} f_a(x) \Rightarrow \varphi(f_a) = \frac{1}{1+a} f_a.\end{aligned}$$

   Ainsi f_a est bien un vecteur de φ associé à la valeur propre $\dfrac{1}{1+a}$.

3. (a) On procède par l'absurde en supposant que $\lambda = 0$ alors

$$\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow k_f = 0 \Rightarrow f = k_f - k_f' = 0$$

   ce qui contredit le fait que $f \neq 0$ (car f est un vecteur propre) donc $\lambda \neq 0$.

(b) Un calcul direct montre que :

$$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow k_f = \lambda f \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda} k_f.$$

La fonction $f \in E$ donc la fonction k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui assure la dérivabilité de f. En utilisant l'équation différentielle vérifiée par k_f, on a :

$$f = k_f - k_f' = \lambda f - \lambda f' \Rightarrow \lambda f' = (\lambda - 1) f \Rightarrow f' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$$

(c) Il existe donc un réel C tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = C \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right)$.

(d) La fonction $g : x \mapsto \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right)$ étant continue et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left|\exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right)\right| dx = \int_0^{+\infty} \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right) dx$$

converge si et seulement si

$$1 - \frac{1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} > 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1.$$

Comme $f \neq 0$, on est assuré que $C \neq 0$ donc

$$f \in E \Leftrightarrow \frac{f}{C} \in E \Leftrightarrow g \in E \Leftrightarrow \lambda \in]0, 1[$$

4. A la question 2, on a établi que l'inclusion $\left\{\frac{1}{1+a}, \quad a \in \mathbb{R}_+^\setminus\right\} \subset \mathrm{Sp}(\varphi) \Leftrightarrow]0,1[\subset \mathrm{Sp}(\varphi)$. A la question 3, on établit l'inclusion réciproque donc $\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,1[$. En outre, pour tout $\lambda \in]0,1[$, on a $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(f_{1-1/\lambda}\right)$.

RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraissemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Les questions informatiques sont désormais abordées par la moitié des candidats et, généralement, elles sont traitées correctement. Rappelons que ces questions sont assez largement valorisées au sein du barême de l'épreuve.

Avec une moyenne de 10,4 et un écart-type de 5,1, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1.

L'exercice (ainsi que les questions non mentionnées ci-dessous) a été convenablement réussi par une part importante des candidats.

A la question 1.b), la relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$ est devinée par une petite minorité de candidats et seuls les meilleurs candidats parviennent à la justifier correctement.

A la question 1.c), l'existence des coefficients a_k est justifiée par de nombreux candidats mais peu d'entre eux percoivent la stratégie à mener pour obtenir la seconde égalité : dériver j fois, évaluer en j, manipuler convenablement les indices avec soin puis déterminer correctement la valeur de $P_k^{(j)}(j)$. Seules les bonnes copies constatent que lorsque $j > k$, $P_k^{(j)}$ est le polynôme nul pour des raisons de degré.

La question 2.c) fut très discriminante. Beaucoup de candidats devinent la bonne valeur du rang mais assez peu de candidats sont capables d'apporter une réponse argumentée et correcte. De façon assez surprenante, il en est de même des valeurs propres alors que la matrice concernée est triangulaire.

La question 3.a) est abordée par 90 % des candidats et la définition du produit scalaire est largement connue des candidats. Par contre, la vérification du caractère défini positif a la plupart du temps échoué faute de précision et de réflexion véritable. Les bonnes copies ne s'y sont pas laissées prendre et ont utilisé la question 1.c). Inversement la justification « une somme de termes positifs ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls » est trop souvent absente des copies.

Pour finir, la question 3.b) est bien moins souvent abordée. Elle l'est avec succès parfois lorsque le candidat avait bien compris les questions 1.b) et 1.c).

EXERCICE 2.

Cet exercice fut particulièrement sélectif. Les questions 1,2 et 5 furent abordées par plus des deux tiers des candidats.

Il est surprenant de constater qu'assez peu de candidats savent justifier correctement le signe de $t \mapsto t^2 - t + 1$ sur $\mathbb{R}$ à la question 1 et une partie importante des candidats ne donne pas le signe correct de ψ sachant sa monotonie sur $\mathbb{R}_+^*$ et le fait que $\psi(1) = 0$.

A la question 2, si plus de la moitié des candidats a répondu correctement à la question mais près d'un tiers des candidats n'a su justifier ni la convergence, ni imaginer (ou établir) la valeur de la somme. La question 3 était inaccessible sans la réponse à la question 2 et, presque réciproquement, les candidats ayant répondu correctement à la question 2 ont obtenu la réponse convenable à la question 3.

A la question 5, si la définition des points critiques et le calcul des dérivées partielles sont corrects, moins de la moitié des candidats parvient à obtenir au moins l'une des trois relations voulues. Cela demande une certaine maitrise des calculs. Les conditions $x > 1$ et $y > 1$ ne sont obtenues que par les meilleurs candidats et les réciproques n'ont quasiment jamais été traitées.

Les autres questions sont traitées plus ou moins avec bonheur par une petite fraction des candidats (moins d'un quart).

PROBLEME.

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n.

Les questions informatiques ont été abordées par un nombre croissant de candidats (près de 50 % d'entre eux) et avec un succès lui aussi croissant (près de la moitié des points attribués à ces questions sont obtenus par les candidats ... les ayant abordées !). Rappelons néanmoins que pour déterminer le maximum d'un tableau, il ne s'agit pas de comparer chaque élément du tableau avec son voisin, mais de créer une variable contenant le maximum provisoire. C'est cette variable qu'on compare successivement aux éléments du tableau et qu'on met à jour dans la boucle.

Si le calcul des fonctions de répartition et des densités est généralement correct, les hypotèses précises pour qu'une fonction soit la fonction de répartition d'une variable à densité, ou pour qu'une fonction soit la densité d'une variable aléatoire, ne sont en général pas assez connues.

Malgré l'indication de la question 5, assez peu de candidats pensent à mobiliser leurs connaissances sur le produit de convolution notamment de l'invoquer sans parler de l'indépendance entre les variables Z_n et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

La question 4 est peu réussie.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

Si la question 1.a) est bien traitée par un grand nombre de candidats, seuls les meilleurs d'entre eux parviennent à répondre correctement à la question 1.b).

Pour la question 2, les hypothèses classiques pour les fonctions intégrables sont rarement toutes vérifiées notamment la continuité. Pour l'obtention d'une domination de fonction $t \mapsto$

$\exp(-t)\, f(t)$, une part importante des candidats s'est basée sur l'une des deux assertions suivantes (qui sont toutes deux fausses) :

- «le produit de deux fonctions intégrables est intégrable»
- «une fonction intégrable au voisinage de l'infini tend forcément vers 0 au voisinage de l'infini».

La question 3 a posé beaucoup de problèmes. Une quantité non négligeable de candidats introduit une primitive de $G : t \mapsto \exp(-t)\, f(t)$ (ce qui est une bonne chose), commettent l'erreur classique : $\int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t)dt = G(x) - \lim_{+\infty} G$ puis ils affirment que la dérivée de $x \mapsto G(x) - \lim_{+\infty} G$ est la fonction $x \mapsto G'(x) - \lim_{+\infty} G'$ (ce qui est une mauvaise chose).

La question 4 est assez peu réussie sauf la relation (β) et le passage formel à la limite quand $A \to +\infty$.

Les questions suivantes sont abordées par une nombre très faible de candidats.

PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$.

La question 1 est réussie par un grand nombre de candidats. Pour la question 2, la majorité des candidats abordant la question (50 %) calcule l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-t}dt$ mais seule une faible fraction des candidats détermine l'espace propre auquel appartient f_a et le fait que f_a ne soit pas le vecteur nul est rarement mentionnée. Les autres questions sont assez peu abordées.