CORRIGE

EXERCICE 1

I. Réduction de la matrice M et calcul de M^n.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors on a

$$\begin{aligned}
PX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y+2z=a \\ 2x+y+z=b \\ x+y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=c \\ (x+y)+3x+2z=a \\ (x+y)+x+z=b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=c \\ 3x-2z=a-c \\ x+z=b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=c & \\ x=a-2b+c & (2)-2(3) \\ z=-a+3b-2c & 3(3)-(2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=a-2b+c \\ y=-a+2b \\ z=-a+3b-2c \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} X
\end{aligned}$$

donc la matrice P est bien inversible (l'équation $PX = Y$ admet une unique solution) et son inverse est donné par : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété $(\mathcal{H}_n) : T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Initialisation $n = 0$. $(\mathcal{H}_0)$ est vraie puisque $T^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

   Hérédité. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un certain n.

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

4. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété $(\mathcal{H}_n) : M^n = PT^nP^{-1}$.
   Initialisation $n = 0$. $\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $M^0 = I$ et $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.
   Hérédité. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n. On commence par remarquer que

$$T = P^{-1}MP \Leftrightarrow PT = MP \Leftrightarrow PTP^{-1} = M$$

   donc on peut écrire :

$$M^{n+1} = M^n M = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^nITP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

   ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

5. Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & -2\times 2^n & 2^n \\ -n-1 & 3n+2 & -2n \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 & 3n - 8\times 2^n + 8 & 4\times 2^n - 2n - 4 \\ 2\times 2^n - n - 2 & 3n - 4\times 2^n + 5 & 2\times 2^n - 2n - 2 \\ 2^n - n - 1 & 3n - 2\times 2^n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

II. Etude d'une suite récurrente linéaire.

1. En utilisant la relation de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} u_3 &= 4u_2 - 5u_1 + 2u_0 = 4\times 0 - 5(-1) + 2\times 1 = 7, \\ u_4 &= 4u_3 - 5u_2 + 2u_1 = 4\times 7 - 5\times 0 + 2\times(-1) = 26 \end{aligned}$$

2. Un calcul direct nous donne :

$$MV_n = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n-1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}.$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété $(\mathcal{H}_n) : V_n = M^nV_0$.
   Initialisation $n = 0$. $\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $M^0V0 = I.V_0 = V_0$.
   Hérédité. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n.

$$V_{n+1} = MV_n = M(M^nV_0) = M^{n+1}V_0.$$

   ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

4. D'après les questions précédentes, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = V_n = \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 & 3n - 8\times 2^n + 8 & 4\times 2^n - 2n - 4 \\ 2\times 2^n - n - 2 & 3n - 4\times 2^n + 5 & 2\times 2^n - 2n - 2 \\ 2^n - n - 1 & 3n - 2\times 2^n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12\times 2^n - 5n - 12 \\ 6\times 2^n - 5n - 7 \\ 3\times 2^n - 5n - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_n = 3.2^n - 5n - 2.$$

EXERCICE 2

I. Etude de la fonction f.

1. (a) D'après le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

   (b) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

   donc C admet une branche parabolique selon l'axe (Oy).

2. (a) Pour tout réel x, on a $f'(x) = e^{-x} - x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ donc le tableau de variation de f est donné par :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

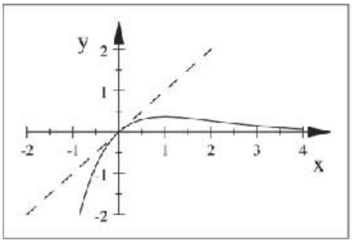
   (b) Son équation est donnée par : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1.(x-0) + 0 = x$

   (c) Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left((1-x)e^{-x}\right)' = (-1)e^{-x} - (1-x)(-1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(x-2)\begin{cases} \geqslant 0 \text{ si } x \geqslant 2 \\ \leqslant 0 \text{ si } x \leqslant 2 \end{cases} \end{aligned}$$

   donc f est concave sur $]-\infty, 2]$ et convexe sur $[2, +\infty[$.

3. La courbe C est en gras et la droite D en pointillé.



II. Etude d'une famille d'équations.

1. Un calcul direct nous donne

$$(E_1) \quad : \quad f(x) = x \Leftrightarrow xe^{-x} = x \Leftrightarrow x\left(e^{-x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ -x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

2. (a) Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x^{n-1}$ sont strictement décroissantes sur $[0, +\infty[$ donc la fonction g_n est également strictement décroissante sur cet intervalle (comme somme de deux telles fonctions).

(b) La fonction g_n étant continue sur $[0, +\infty[$ et comme

$$g_n(0) = 1 > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = -\infty,$$

le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $g_n(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En outre, la fonction g_n étant strictement monotone sur cet intervalle, cette équation admet alors exactement une seule solution.

(c) Comme on a $g_n(0) = 1 > 0$ et $g_1(1) = e^{-1} - 1^{n-1} = \frac{1}{e} - 1 < 0$, on en déduit que $\alpha_n \in]0, 1[$.

(d) Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$(E_n) \quad : \quad f(x) = x^n \Leftrightarrow xe^{-x} = x^n \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x > 0 \text{ et } e^{-x} = x^{n-1} \quad (\div x \neq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x > 0 \text{ et } g_{n-1}(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0, \alpha_n\}.$$

III. Etude d'une variable aléatoire à densité.

1. On procède par intégration par parties en posant $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t}$, on a $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t)dt &= \int_0^x te^{-t}dt = \left[t\left(-e^{-t}\right)\right]_0^x - \int_0^x 1(-e^{-t})dt \\ &= -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\ &= 1 - (x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

2. La fonction h est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty, 0]$ (car la fonction $x \mapsto 0$ y est continue), continue sur $[0, +\infty[$ (car la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ y est continue) et

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} xe^{-x} = 0$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$ ce qui assure la continuité de h sur $\mathbb{R}$. En outre, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$\int_0^x h(t)dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \underset{x \to +\infty}{\to} 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} h(t)dt = 1$$

(d'après les croissances comparées) et l'on a évidemment $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt = 0$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = \int_{-\infty}^{0} h(t)dt + \int_0^{+\infty} h(t)dt = 0 + 1 = 1$$

ce qui nous assure que h est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

3. Par définition, on a pour tout réel x, $H(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)dt$. Par conséquent, pour tout réel $x \leqslant 0$, on a $H(x) = \displaystyle\int^{x} 0dt = 0$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{0} h(t)dt + \int_{0}^{x} h(t)dt = 0 + 1 - (x+1)e^{-x} = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

4. Il est immédiat que :

$$\begin{aligned}
P(X &\leqslant 1) = H(1) = 1 - 2e^{-1} \\
P(1 &\leqslant X \leqslant 2) = H(2) - H(1) = \left(1 - 3e^{-2}\right) - \left(1 - 2e^{-1}\right) \\
&= 2e^{-1} - 3e^{-2} \\
P_{(X \leqslant 2)}(X \geqslant 1) &= \frac{P([X \leqslant 2) \cap (X \geqslant 1)]}{P(X \leqslant 2)} = \frac{P(1 \leqslant X \leqslant 2)}{P(X \leqslant 2)} \\
&= \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{H(2)} = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{1 - 3e^{-2}}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 3

I. Etude du premier jeu :

1. On note D_i l'événement «le premier dé fournit le numéro i» et D'_i l'événement «le second dé fournit le numéro i» alors on a

$$\begin{aligned}
p &= P(A) = P((D_1 \cap D'_1) \cup (D_2 \cap D'_2) \cup \cdots \cup (D_6 \cap D'_6)) \\
&= P(D_1 \cap D'_1) + P(D_2 \cap D'_2) + \cdots + P(D_6 \cap D'_6) \\
&\quad \text{(événements incompatibles)} \\
&= P(D_1).P(D'_1) + P(D_2).P(D'_2) + \cdots + P(D_6).P(D'_6) \\
&\quad \text{(événements indépendants)} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \cdots + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2. (a) Le nombre de points obtenus est égal au nombre de succès de l'événement A. Sachant que l'on répète l'expérience $\mathcal{E}$ «lancer une fois les deux dés» n fois, chaque expérience étant identique et indépendante et l'on compte le nombre de succès de l'événement A, la loi de Y_n est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, P(A)) = \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$ donc Y_n prend les valeurs $\{0, 1, .., n\}$ et l'on a pour tout $k \in \{0, 1, .., n\}$,

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

(b) D'après le cours, on a $E(Y_n) = np = \frac{n}{6}$, $V(Y_n) = np(1-p) = \frac{5n}{36}$.

3. (a) Sachant que l'on répète l'expérience $\mathcal{E}$ «lancer une fois les deux dés» n fois, chaque expérience étant identique et indépendante et l'on s'intéresse à la première réalisation de l'événement A, la variable Z suit la loi géométrique de paramètre $P(A) = p = \frac{1}{6}$ donc Z prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$ et l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z = k) = p^{k-1}(1-p) = \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}.$$

(b) D'après le cours, on a $E(Z) = \frac{1}{p} = 6$, $V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6^2}} = 30.$

II. Etude d'un deuxième jeu.

1. Un calcul direct nous donne :

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(E_1) = P(E_3) \text{ et } P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1 \\ &\Rightarrow P(E_1) = P(E_3) = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

2. Il est immédiat que X_i prend les valeurs $\{0, 1, 2\}$. En outre, on a

$$P(X_i = 0) = P(E_1) = \frac{5}{12}, \quad P(X_i = 1) = P(E_3) = \frac{5}{12}, \quad P(X_i = 2) = P(E_2) = \frac{1}{6}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \times P(X_i = 0) + 1 \times P(X_i = 1) + 2 \times P(X_i = 2) \\ &= \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4} \\ E(X_i^2) &= 0^2 \times P(X_i = 0) + 1^2 \times P(X_i = 1) + 2^2 \times P(X_i = 2) \\ &= \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{12}. \\ V(X_i) &= E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{13}{12} - \frac{9}{16} = \frac{25}{48}. \end{aligned}$$

3. Il est immédiat que $S_1 = X_1$ donc S_1 prend les valeurs $\{0, 1, 2\}$ et l'on a

$$P(S_1 = 0) = P(S_1 = 1) = \frac{5}{12}, \quad P(S_1 = 2) = \frac{1}{6}.$$

4. La somme des points obtenus au cours de 2 parties est la somme des points obtenus à chacune des deux parties soit

$$S_2(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

On remarque ensuite que :

$$\begin{aligned} (S_2 &= 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0) \\ (S_2 &= 1) = [(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 1)] \\ (S_2 &= 2) = [(X_1 = 2 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 2)] \\ (S_2 &= 3) = [(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1)] \\ (S_2 &= 4) = [(X_1 = 2 \cap X_2 = 2)] \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y_2 &= 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0).P(X_2 = 0) = \frac{25}{144} \\ &\quad (X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont des var indépendantes}) \\ P(Y_2 &= 1) = P[(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 1)] \\ &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \quad (\text{événements incompatibles}) \\ &= P(X_1 = 1).P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0).P(X_2 = 1) \\ &\quad (X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont des var indépendantes}) \\ &= \frac{50}{144} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y_2 &= 2) = P[(X_1 = 2 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 2)] \\ &= P(X_1 = 2 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \\ &\quad (\text{événements incompatibles}) \\ &= P(X_1 = 2).P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1).P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0).P(X_2 = 2) \\ &= \frac{45}{144} \end{aligned}$$

$$P(Y_2 = 3) = P[(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1)] = \cdots = \frac{20}{144}.$$
$$P(Y_2 = 4) = P[(X_1 = 2 \cap X_2 = 2)] = \frac{4}{144}.$$

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4
$P(Y_2 = i)$	25/144	50/144	45/144	20/144	4/144

5. (a) On a $S_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (même argumentaire qu'à la question 4.
   (b) Voici le tableau tant attendu.

$P(S_3 = i \cap S_2 = j)$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 0$	125/1728	0	0	0	0
$i = 1$	125/1728	250/1728	0	0	0
$i = 2$	50/1728	250/1728	225/1728	0	0
$i = 3$	0	100/1728	225/1728	100/1728	0
$i = 4$	0	0	90/1728	100/1728	20/1728
$i = 5$	0	0	0	40/1728	20/1728
$i = 6$	0	0	0	0	8/1728

Justification du calcul de $P(S_3 = 0 \cap S_2 = 0)$.

$$\begin{aligned} P(S_2 &= 0 \cap S_3 = 0) = P(S_2 = 0).P_{(S_2=0)}(S_3 = 0) \\ &= P(S_2 = 0).P(X_3 = 0) = \frac{5}{12}.\frac{25}{144} = \frac{125}{1728}. \end{aligned}$$

En effet, la probabilité $P_{(S_2=0)}(S_3 = 0)$ correspond à la probabilité de n'avoir marqué aucun point à l'issue des trois premières parties sachant que l'on a marqué aucun point durant les deux premières parties, c'est-à-dire de n'avoir marqué aucun point au cours de la troisième partie.

   (c) En utilisant le système complet d'événements $(S_2 = j)_{0 \leqslant j \leqslant 4}$, on a pour tout $j \in \{0, .., 6\}$:

$$P(S_3 = j) = P(S_3 = j \cap S_2 = 0) + \cdots + P(S_3 = j \cap S_2 = 4)$$

Par conséquent, le tableau précédent nous fournit la table de loi de S_3 ci-dessous :

j	0	1	2	3
$P(S_3 = j)$	125/1728	375/1728	525/1728	425/1728
j	4	5	6	
$P(S_3 = j)$	210/1728	60/1728	8/1728	

6. (a) Le nombre de points obtenus à l'issue de n parties est simplement la somme des points accumulés à chaque partie donc
$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$
Par linéarité de l'espérance, on a
$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{4}}_{n \text{ fois}} = \frac{3}{4}.n = \frac{3n}{4}$$

   (b) Un calcul direct nous donne :
$$E(Y_n) \geqslant 10 \Leftrightarrow \frac{3n}{4} \geqslant 10 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{40}{3} \simeq 13,3 \Leftrightarrow n \geqslant 14$$
donc en moyenne le nombre minimum de parties pour obtenir plus de 10 points est 14.