



المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية  
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

**CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE  
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT**

(18-07-2000)

**Epreuve de Mathématiques**

(Durée: 3H00)

---

**Avertissement:**

- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- Encadrer vos résultats
- Les 4 exercices doivent être traités sur des feuilles séparés



وكالة تنظيم قطاع الاتصالات  
AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

---

## Exercice 1

Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $x$  un réel strictement positif et  $f_n$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

1) a) Montrer l'existence, pour tout  $x$  strictement positif de :

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

b)  $n$  étant un entier donné et  $k$  étant un entier naturel inférieur à  $n$ , on pose :

$$A(k) = \int_0^1 u^{x+k-1} (1-u)^{n-k} du \quad \text{où } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Déterminer une relation liant  $A(k)$  et  $A(k-1)$ . En déduire la valeur de  $I_n(x)$  en l'exprimant en fonction de  $A(n)$  qu'il est facile de calculer.

2) On définit sur  $\mathbb{R}_+^*$  la fonction Gamma d'Euler par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

Montrer que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n! n^x \prod_{p=0}^n \frac{1}{x+p} \right)$$

3) Montrer que :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \exp(\gamma x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \exp(-x/n).$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler :  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ .

4) Montrer que la fonction Gamma d'Euler possède un prolongement holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ .

---

## Exercice 2

Soit  $p$  et  $q$  deux entiers positifs.

1) Montrer que :

$$x^p \delta^{(q)} = \begin{cases} (-1)^p \frac{q!}{(q-p)!} \delta^{(q-p)} & \text{si } p \leq q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$$

où  $\delta^{(i)}$  est la dérivée  $i^{\text{ème}}$  de la distribution de Dirac.

2) En déduire la formule :

$$f\delta^{(q)} = \sum_{p=0}^q (-1)^p C_q^p f^{(p)}(0)\delta^{(q-p)},$$

où  $f$  est une fonction analytique à l'origine.

3) Calculer :

$$(\sin x)\delta' \text{ et } (\cos x)\delta'$$

4) Soit  $n$  et  $m$  deux autres entiers positifs. Calculer

$$(x^p\delta^{(q)}) * (x^m\delta^{(n)}).$$

### Exercice 3

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert réel de dimension finie. Soient  $C_1, \dots, C_N$  ( $N$  entier  $\geq 2$ ) des parties convexes fermées de  $E$  telles que :  $C = \bigcap_{i=1}^N C_i$  est non vide.

Le problème consiste à construire une suite de points de  $E$  dont la limite appartient à  $C$ .

Soit  $u_0 \in E$  arbitraire ; supposons construits  $u_1, \dots, u_n$  ; on détermine  $u_{n+1}$  ainsi :  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  on considère  $u_n^i$  la projection de  $u_n$  sur  $C_i$  que l'on note  $P_{C_i}(u_n)$ , et on pose :

$$u_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_n^i.$$

1) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall c \in C_i :$

$$(d(u_n, C_i))^2 \leq \|c - u_n\|^2 - \|u_n^i - c\|^2,$$

où  $d(u_n, C_i)$  dénote la distance de  $u_n$  à  $C_i$ .

2) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N} :$

$$\forall v \in E : \|u_{n+1} - v\|^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|u_n^i - v\|^2.$$

3) Démontrer qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall c \in C : \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d(u_n, C_i))^2 \leq \|u_n - c\|^2 - \|u_{n+1} - c\|^2.$$

4) Démontrer que pour tout  $c \in C$  la suite  $(\|u_n - c\|)$  est convergente dans  $\mathbb{R}$ . Dédisez-en que :  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, C_i) = 0$ .

5) Démontrer que de la suite  $(u_n)$  on peut extraire une sous-suite convergente vers un  $\hat{u} \in E$ .

6) Démontrer que si  $\lim_{n \in S} u_n = \hat{u}$  et  $\lim_{n \in T} u_n = \bar{u}$ , alors on a  $\hat{u} = \bar{u}$  ( $S$  et  $T$  désignent deux parties infinies de  $\mathbb{N}$ ).

Dédisez des résultats ci-dessus que  $(u_n)$  est convergente dans  $E$  et que sa limite est une solution du problème posé (i.e. la limite est un élément de  $C$ ).

#### Exercice 4

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, d'espérance  $\mu$  de variance  $\sigma^2$  finie. On pose  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\Sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  et

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

1) On suppose que la loi des  $X_i$  est gaussienne, c'est-à-dire  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  pour  $i = 1, \dots, n$ ,

a) Quelle est la loi de  $n \frac{\Sigma^2}{\sigma^2}$  ?

b) Montrer que  $\bar{X}$  et  $S^2$  sont indépendantes.

c) Montrer que  $n \frac{S^2}{\sigma^2}$  suit une loi du  $\chi^2(n-1)$  ; on pourra supposer d'abord  $\mu = 0$ , puis  $\mu$  quelconque.

2) On ne suppose plus connue la loi des  $X_i$ , mais on suppose que  $\bar{X}$  et  $S^2$  sont indépendantes. On note  $\phi$  la fonction caractéristique des  $X_i$

a) Soit  $\mu = 0$ . Calculer l'espérance de  $nS^2$  (que l'on note  $E(nS^2)$ ) en fonction de  $\sigma^2$  et montrer que pour tout réel  $t$ ,  $E(nS^2 \exp(itn\bar{X})) = (n-1)\sigma^2 \phi^n(t)$ . En déduire que  $\phi$  est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\phi''}{\phi} - \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = -\sigma^2 \\ \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

En déduire alors que  $X_i \sim N(0, \sigma^2)$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

b) Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse  $\mu = 0$ .