Concours d'Accès en Première Année du Cycle d'Ingénieurs d'Etat
Epreuve de Mathématiques (Juillet 2013)
Durée : 2 Heures

Exercice 1

On considère la série de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de terme général :

$$u_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

1°) (a) Montrer que la série de terme général $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1)$ est convergente et déterminer sa somme.

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k u_k(1) = 0.$

(c) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, où $v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k(1)$ converge et donner sa somme.

2°) (a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa somme S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Converge t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$?

3°) (a) Trouver une relation simple entre $S(x)$ et $S(x+1)$.

(b) Trouver un équivalent de S aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

4°) Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $G(y) = \int_0^1 t^{y-1}e^{-t}dt.$

(a) Quel est le domaine de définition de G ?

(b) Prouver que G est convexe sur son domaine de définition.

5°) (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, établir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e}{(x+n)\,n!}.$$

(b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k} = \int_0^1 t^{x-1}e^{1-t}dt.$$

Exercice 2

Soit M la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°) (a) Déterminer les nombres réels λ tels que $M - \lambda Id_4$ ne soit pas inversible. (Id_4 désigne la matrice identité d'ordre 4).

(b) Pour chacune de ces valeurs λ, déterminer les vecteurs X de $\mathbb{R}^4$, tels que $MX = \lambda X$.

2°) Soient H et H' deux matrices carrées d'ordre 4, écrites sous la forme de blocs :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad O = (0\ \ 0\ \ 0),\ C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C + AC' & AA' \end{pmatrix}$.

3°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4°) On considère la matrice W définie par : $W = V - 2\,Id_3$, où Id_3 est la matrice identité d'ordre 3.

(a) Calculer W^2 et W^3.

(b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W^n.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter V^n.

5°) (a) Soit X_1 l'unique vecteur de $\mathbb{R}^4$, telle que $MX_1 = X_1$ et dont la première composante vaut 1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n X_1$.

(b) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de a_n b_n et c_n en fonction de n.

Avertissement : *Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les autres. Encadrer vos résultats.*