ROYAUME DU MAROC
AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TÉLÉCOMMUNICATIONS

المملكة المغربية
الوكالة الوطنية لتقنين المواصلات
المعهد الوطني للبريد و المواصلات السلكية و اللاسلكية

CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
24-06-2003

Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée : 3Heures)

Avertissement :

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Exercice 1

I) 1) Soient deux suites réelles a_n, b_n telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = l \neq 0$.

On suppose que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est divergente.

a) Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est 1.

b) Montrer que : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = l$.

2) Soit c_n une suite réelle convergeant vers une limite non nulle.

a) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n} x^n$?

b) On note C la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n} x^n$. Calculer la $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{C(x)}{\ln(1-x)}$.

II) On dit que la série complexe $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ *converge au sens de Poisson* si, et seulement si la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ a pour rayon de convergence 1 et si $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$ existe, où f désigne l'application définie sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$.

1) Montrer que, dans le cas où $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ est convergente si elle converge au sens de Poisson.

2) Montrer que si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ converge au sens de Poisson et $\lim_{n \to +\infty} n\alpha_n = 0$ alors elle est convergente et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$.

3) On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ et on suppose que la série complexe $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ converge et que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ a pour rayon de convergence 1 .

a) Montrer que $\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$.

b) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ converge au sens de Poisson et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1,1[}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$.

4) Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$ deux séries complexes convergentes. On suppose que la série de terme général $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$ est convergente. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n\right).$$

Exercice 2

1) On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad xy'' + y' - xy = 0$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = \pi$, $y'(0) = 0$.

a) Montrer que si $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de **(E)**, alors $(n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1}$.

b) Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

c) Montrer que **(E)** admet une solution développable en série entière.

2) Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(0)$.

b) Etudier la parité et les variations de F.

c) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^u$

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) - F(x_0) + (x - x_0) \int_{-1}^{1} \frac{t\, e^{-x_0 t}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-x_0 t}}{\sqrt{1-t^2}} dt \left(e^{-(x-x_0)t} - 1 + (x - x_0)t \right) dt.$$

b) En déduire qu'il existe $\alpha, A \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\text{pour tout } x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \qquad \left| F(x) - F(x_0) + (x - x_0) \int_{-1}^{1} \frac{t\, e^{-x_0 t}}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq A(x - x_0)^2.$$

c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée

4) On admettra que la dérivée seconde de F existe sur $\mathbb{R}$ et que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad F''(x) = \int_{-1}^{1} \frac{t^2\, e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

a) Vérifier que F est solution de **(E)**.

b) Montrer que F est développable en série entière et donner son développement.

Exercice 3

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

I) 1) Montrer que si la norme $x \mapsto \|x\|$ sur E est euclidienne alors :

$$\forall x, y \in E \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

2) Réciproquement, on suppose que la norme sur E vérifie l'identité du parallélogramme et on se propose de démontrer alors qu'elle est associée à un produit scalaire.

On pose pour $x, y \in E$:

$$p(x, y) = \|\frac{x+y}{2}\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2.$$

a) Montrer que $p(2x, y) = 2p(x, y)$ et $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y)$.

b) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y)$ (on envisagera successivement $\alpha \in \mathbb{N}$; $\alpha \in \mathbb{Z}$; $\alpha \in \mathbb{Q}$; $\alpha \in \mathbb{R}$) et que la norme sur E est euclidienne.

3) Montrer que si la norme $x \mapsto \|x\|$ sur E vérifie l'une des deux inégalités suivantes :

$$\text{(i) } \forall x, y \in E; \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \leq 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

$$\text{(ii) } \forall x, y \in E; \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

alors elle est associée à un produit scalaire.

II) On suppose E euclidien et on note $< ., . >$ le produit scalaire sur E.

1) Montrer que toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que $\forall x, y \in E$, $< x, f(y) >=< y, f(x) >$, est linéaire.

2) Soit $g : E \longrightarrow E$ telle que $g(0) = 0$ et $\forall x, y \in E, \quad \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$. Montrer alors que g est un automorphisme orthogonal.

III) On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}^3$. Soit $h : x \mapsto < a, x > a + b \wedge x$ où a et b sont deux vecteurs donnés, $< ., . >$ dénote le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$ et $\wedge$ dénote le produit vectoriel.

1) A quelle condition sur a et b a-t-on $\text{rang}(h) \leq 2$?

2) On suppose que $< a, b >= 1$.

a) Montrer que h^{-1} existe, et que pour y orthogonal à b, $h^{-1}(y) = y \wedge a$.

b) Donner h^{-1} sous une forme analogue à celle de h.