المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
26-06-2002

Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée : 3Heures)

Avertissement :
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Agence Nationale de Réglementation des Télécommunications

Exercice 1

On considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$, où α est un réel strictement positif.

I)

1) Etudier la convergence de cette intégrale pour les valeurs de α appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$.

2) Prouver la convergence de l'integrale lorsque l'on a $\alpha \in]0, 1]$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour l'étude au voisinage de l'infini).

3) Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement

$$\frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \right| \leq \frac{2}{n^\alpha \pi^\alpha}.$$

Qu'en déduit-on sur la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| dt$?

II)

1) Soit $x \in [0, +\infty[$. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-xt) \frac{\sin t}{t} dt$. On note $F(x)$ la valeur de cette intégrale. Dans la suite, on envisagera $F(x)$ comme la somme de la série de terme général

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \exp(-xt) \frac{\sin t}{t} dt.$$

2) a) Soit $a \in]0, +\infty[$. Etudier la convegence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

b) Etudier la convegence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, établir l'inégalité $| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)| \leq |u_n(x)|$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

c) Enoncer précisément un théorème prouvant la continuité de F sur $[0, +\infty[$ et montrer que l'on a

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.$$

4) Démontrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, et donner une expression simple de F' sur cet intervalle.

5) Déduire des résultats précédents une expression de $F(x)$ et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On note id l'application identique de E. Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = id$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
Soit p un entier strictement positif. On dit que f est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions :

(i) $f^p(x_0) = x_0$,

(ii) la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E,

(iii) $f^k(x_0)$ est distinct de x_0 pour tout $k \in [1, p[\cap \mathbb{N}$.

La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un cycle de f.

I) Dans cette partie, E est de dimension 3, et $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3 \ ; \ f(e_2) = 2e_1 + e_2 - 2e_3 \ ; \ f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 - 3e_3$$

1) Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E et donner la matrice de f relativement à cette base.
2) Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.
3) Calculer f^4 et déduire sans calcul supplémentaire que f est diagonalisable.
4) Déterminer une base de E formée de vecteurs propres de f.

II) Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.
1) Montrer que $n \leq p$.
2) Montrer que $f^p = id$ et déduire que f est bijective.
3) On note m le plus grand des entiers k tels que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est libre.
   a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire de $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
   b) En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
4) On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

   a) Montrer que $f^n = a_0\, id + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
   b) Déterminer la matrice de f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.
   c) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, rg(f - \lambda id) \geq n - 1$.
En déduire les dimensions des sous espaces propres de f.
5) On suppose que f est cyclique d'ordre n et on considère $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f.
   a) Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $\lambda^n = 1$.
   b) Déterminer la matrice de f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.
   c) Montrer que f est diagonalisable et donner une base de E formée de vecteurs propres de f.