Concours d'Accès au Cycle normale de

L'Institut Supérieur d'Etudes Maritimes (ISEM)

Session 6 juillet 2013

ROYAUM
MINISTERE D
ET DU

Epreuves : Mathématiques (durée : 2h)

Partie I (6 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

ainsi que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire le tableau de variation de f. Préciser les limites de f en +
3. Tracer $\mathcal{C}$. On choisira une unité graphique de 4 cm.

Partie II (6 pts)

1. Calculer $J = \int_0^1 x e^{-x} \, dx$.
2. Vérifier que f est telle que : $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$.
3. En déduire que

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 2J - f(1)$$

(J est définie à la question II - 1.).

Partie III (6 pts)

L'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α, et appartenant à l'intervalle $I = [-1, 0]$.

1. Soit $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.

2. Montrer que $g(I)$ est inclus dans I et que $| g'(x) | \leqslant \frac{1}{e}$ pout tout x appartenant à I.

3. En déduire que $| g(x) - \alpha | \leqslant \frac{1}{e} | x - \alpha |$ pout tout x appartenant à I.

4. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} U_0 = -0,5 \\ U_{n+1} = g(U_n) \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$$

On admet que U_n appartient à I pour tout entier $n \geqslant 0$.
Montrer que

$$| U_n - \alpha | \leqslant \frac{1}{e^n} | U_0 - \alpha | \leqslant \frac{1}{2e^n}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

5. Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près.