Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2014

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. **Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matérie électronique est interdite.**
2. **Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.**
3. **Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.**
4. **Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément dı sujet.**
5. **Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.**
6. **Le barème suivant sera adopté:**

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: − 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Soit X une variable aléatoire réelle ayant une densité de probabilité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec 0 \\ c\exp(-\frac{x^2}{2})\ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

où c est une constante (éventuellement à calculer).

La variance de X est égale à:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2\pi}$ C) $1-\frac{2}{\pi}$ D) 1 E) Autre réponse

Question 2: Soit α un réel non nul. On considère la suite $(p_n)_{n\succ 0}$ définie par : $\forall n \in I\!N^*,\ p_n = \frac{1+\alpha^{n-1}}{4(n-1)!}$ La suite $(p_n)_{n\succ 0}$ définit une loi de probabilité pour α égal à:

A) $2e+1$; B) $2e-1$; C) $\ln(e-2)$; D) $\ln(4-e)$; E) Autre réponse

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ par:

$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$.

f présente un extremum :

A) local en A(1,0); B) local en A(-1,0); C) global en A(-1,0); D) global en A(1,0);

E) Autre réponse

Question 4 : Pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M, et φ l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M de $M_2(R)$ associe

$\varphi(M) = M + {}^tM$.

La dimension du sous-espace vectoriel Im φ est égale à:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre réponse

Question 5 : Soit $(m;\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire réelle ayant une densité de probabilité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec 0 \\ c\exp(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

où c est une constante qui dépend de m et σ (éventuellement à calculer).
On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'espérance mathématique de X est égale à:

A) $|m|$ B) $m + \dfrac{\sigma}{\Phi(\frac{m}{\sigma})\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{m^2}{2\sigma^2})$ C) $m + \dfrac{\sigma\Phi(\frac{m}{\sigma})}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{m^2}{2\sigma^2})$

D) $m + \dfrac{\sigma}{\Phi(\frac{m}{\sigma})\sqrt{2\pi}}$ E) Autre réponse

Question 6 : Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, définie sur IR par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

L'espérance de X est :

A) $\dfrac{3}{2}$; B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; C) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; D) $\sqrt{\pi}$; E) Autre réponse

Question 7 : On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

Cette série est convergente de somme:

A) $\dfrac{e}{3}$ *B)* $\dfrac{e}{6}$ *C)* $\dfrac{3e}{5}$ *D)* e *E) Autre réponse*

Question 8 : Soit f la fonction réelle de la variable réelle x définie par $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$.

Un équivalent de $f(x) - x \quad quand \ x \to +\infty$ est:

A) $-x$ B) $-\dfrac{1}{x}$ C) $-\dfrac{1}{2x}$ D) $\dfrac{1}{2x}$ E) Autre réponse

Question 9 : Trois enfants A , B , C jouent à la balle .

- Lorsque A a la balle , la probabilité pour qu'il la lance à B est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- Lorsque B a la balle , la probabilité pour qu'il la lance à A est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.
- C envoie toujours la balle à B .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement : " A (respectivement B , C) a la balle à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer " .

On pose : $a_n = p(A_n), b_n = p(B_n), c_n = p(C_n)$.

Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs : c'est par convention le lancer numéro 0 .

Donc on pose : $a_0 = p(A_0), b_0 = p(B_0), c_0 = p(C_0) \ avec \ a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Il existe une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que:

$\forall n \in N, \ X_n = D^n . X_0$, où :

$A) \ D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$ $B) \ D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ $C) \ D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$

$D) \ D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$ *E) Autre réponse*

Question 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ *et* $u_1 = 1$

et par $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. La suite est strictement positive à partir du rang 1.

On pose $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) =$

A) $+\infty$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{15+5\sqrt{5}}{16}$ D) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ E) Autre réponse

Question 11 : La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $u_n = \dfrac{n^2(\ln(n+1)-\ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}$, est:

A) 1 ; B) $\dfrac{2e-1}{3}$; C) 2 ; D) $+\infty$; E) Autre réponse

Question 12 : On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble E des matrices T de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ de dimension égale à:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) Autre réponse

Question 13 : On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. L'intégrale $\displaystyle\int_{2-\sqrt{2}}^{2} \exp(-x^2+4x-2)dx$ est égale à:

A) $e^{-2}\Phi(2)\sqrt{\pi}$; B) $e^2\sqrt{2\pi}\,(\Phi(2)-\dfrac{1}{2})$; C) $e^2\sqrt{\pi}\,(\Phi(2)-\dfrac{1}{2})$; D) $\sqrt{2\pi}\,\Phi(2)$;

E) Autre réponse

Question 14 : Soient X_1 *et* X_2 deux variables aléatoires discrètes finies, indépendantes, et de même loi de probabilité, avec:

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad p(X_i = 0) = \frac{1}{6} \quad , \quad p(X_i = 1) = \frac{1}{3} \quad et \quad p(X_i = 2) = \frac{1}{2}$$

On pose: $S = X_1 + X_2$ *et* $P = X_1 X_2$

Le coefficient de corrélation linéaire de S et P est égal à :

A) 0 B) -1 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Question 15 : Pour $n \in I\!N^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k}{4k^2 - 1}$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers :

A) $e^2 + 1$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{e}{4}$; D) $\ln 2$; E) Autre réponse

Question 16: On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Après avoir montré que A est diagonalisable, on aboutit à A^n pour n entier naturel non nul, égal à:

A) $A^n = \begin{pmatrix} -2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$; B) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$;

C) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^n & 0 \\ 2^n & (-1)^n + 2^n & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^n + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$; D) $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2 \times 2^n & 0 \\ (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$;

E) Autre réponse

Question 17: On considère deux pièces truquées A et B ; A donne pile avec la probabilité a $(0 < a < 1)$, et B donne pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance: si on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois $(k \geq 2)$.
La limite de la probabilité de lancer la pièce A au $k^{\text{ième}}$ lancer lorsque k tend vers l'infini est égale à:

A) $\frac{b}{a+b}$ *B)* $\frac{1-b}{a-b+1}$ *C)* $\frac{1-a}{1-a+b}$ *D)* $\frac{a}{a+b}$ *E) Autre réponse*

Question 18 On désigne par tr(M) la trace d'une matrice carrée à coefficients réels M.
Soient A et B $\in Mn(\mathbb{R})$, des matrices vérifiant AB − BA = A
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(A^p) =$

A) tr(A) B) tr(AB) C) 0 D) tr(B) E) Autre réponse

Question 19 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & -4 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre réel.}$$

et f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de IR^3.
Les valeurs de λ pour lesquelles la dimension de Ker f est égale à 1, sont:

A) $\lambda \in \{-1, 1, 3\}$; B) $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; C) $\lambda \in \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$; D) $\lambda \in \left\{-4, \frac{1}{4}, 4\right\}$;
E) Autre réponse

Question 20 Soient α, β, δ, λ quatre nombres réels vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} 0 \prec \alpha \;\; ; \;\; 0 \prec \beta \prec \dfrac{1}{2} \\ 0 \prec \delta \;\; ; Max(0, \ln(2\delta)) \prec \lambda \end{cases}$$

et soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F définie par,

$$F : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0;1] \\ t \mapsto \text{Proba}[\text{X} \leq \text{t}] \end{array} \right. \text{ est la fonction suivante: } F(t) = \begin{cases} \beta \exp(\alpha t) & si\ t \prec 0 \\ \dfrac{1}{2} & si\ t \in [0;1[\\ 1 - \delta \exp(-\lambda t) & si\ t \geq 1 \end{cases}$$

On appelle médiane de X, tout nombre réel m vérifiant la condition suivante: $\begin{cases} \text{Proba}[\text{X} \leq \text{m}] \geq \dfrac{1}{2} \\ \text{Proba}[\text{X} \geq \text{m}] \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Alors l'ensemble des médianes de X est

A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $]0;1[$ C) $]0;1]$ D) $[0;1[$ E) Autre Réponse