Mathématiques I

Épreuve 2013

<u>Question 1</u> : On considère une succession de sacs que l'on désigne par S_1, S_2,.... Sk
Au départ le sac S_1 contient 2 jetons noirs et un jeton blanc ; tous les autres sacs contiennent chacun un jeton noir et un jeton blanc.

On tire au hasard un jeton du sac S_1 que l'on place dans le sac S_2. Puis on tire au hasard un jeton du sac S_2 que l'on place dans le sac S_3, et ainsi de suite.

On note B_k l'évènement : << le jeton tiré du sac S_k est blanc >>, et $p_k=p(B_k)$ sa probabilité.
Alors pour tout $n \geq 1$:

A: $P_{n+1} = 1/3p_n + 2/3$; B: $P_{n+1} = 1/3p_n + 1/3$; C: $P_{n+1} = 1/3p_n - 2/3$;
D: $P_{n+1} = 1/3p_n - 1/3$; E: Autre réponse

<u>Question 2</u>: Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, et on suppose que $n \geq 3$. On tire au hasard et successivement 3 boules de l'urne ; les tirages sont effectués sans remise.
La probabilité de l'évènement : " On a obtenu dans l'ordre trois numéros consécutifs" est :

A : $\frac{1}{n^2}$; B : $\frac{1}{n(n-1)(n+1)}$; C : $\frac{1}{n(n-1)}$; D : $\frac{1}{n(n+1)}$; E: Autre Réponse

<u>Question3</u> : Soit X une variable aléatoire a densité, de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.
On pose $Y = -\beta \ln(X)$; β étant un nombre réel strictement positif.
Déterminer l'espérance mathématique de Y.

A/ $\frac{\beta}{2} + 1$; B/ 2β ; C/ β ; D/ $\ln(\beta)$; E/ Autre Réponse

Question4 :

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant (n+1), soit il y reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note A_n l'événement : " le mobile se trouve en A à l'instant n ".

B_n l'événement : " le mobile se trouve en B à l'instant n".

C_n l'événement : " le mobile se trouve en C à l'instant n".

On pose ; $a_n=p(A_n)$, $b_n=p(B_n)$ et $c_n=p(C_n)$.

Soit le vecteur-colonne de $\mathbf{R}^3$: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On a alors : $X_{n+1} = M.X_n$, où M est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

A) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

Question 5 : Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité de probabilité la fonction réelle f définie par :

$f(x) = a \exp(-3x^2)$ Pour tout x réel où $\boldsymbol{a}$ est une constante à déterminer éventuellement.

L'écart-type de X est :

A : $\frac{1}{3}$; B : $\frac{1}{\sqrt{3}}$; C : $\sqrt{6}$; D : $\frac{1}{\sqrt{6}}$; E : Autre Réponse

Question 6 : Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & si\ x > a \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad ; a \in IR$$

Déterminer le nombre réel m tel que : $F(m) = \frac{1}{2}$, où F est la fonction de répartition de X.

A/ ln2 ; B/ a+ln2 ; C/ $a - \frac{1}{3} ln2$; D/ $\frac{1}{2} a$; E/ Autre Réponse.

Question 7 Soit a un nombre réel non nul, on considère la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in IN$,

$p_n = \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^n}{n!}\right)$

Pour quelle valeur de a, la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définit-elle une loi de probabilité ?

A/ ln2 ; B/ ln (8-2e) ; C/ 1-ln (8-e) ; D/ $\frac{1}{2}$; E/ Autre réponse.

Question 8 : Une urne contient 3 dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portent le numéro 6.
On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note pour tout n entier non nul, S_n l'évènement << on obtient 6 à chacun des n premiers lancers >> et P_n sa probabilité

Alors

A : $P_n = \frac{1}{2(\frac{1}{4})^n+1}$; B : $P_n = \frac{1}{2(\frac{1}{3})^n+1}$; C : $P_n = \frac{1}{2(\frac{1}{6})^n+1}$; D : $P_n = \frac{1}{2(\frac{2}{3})^n+1}$; E : Autre Réponse

Question 9 :
On donne la série statistique suivante : 14, 16, 12, 9, 11, 18, 7, 8, 9, 16, 7, 9, 18.
La médiane est égale à :

A) 9 B) 11 C) 14 D) 16 E) Autre réponse

Question 10 : Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k}$

A/ $+\infty$; B/ $\frac{3}{2}$; C/ $3e^2$; D/ 2 ; E/ Autre Réponse

Question 11 : Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$\int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$

Alors $I_{n+1} =$

A : $-1-(n+1)I_n$; B : $-1-I_n$; C : $-1+nI_n$; D : $-1+(n+1)\, I_n$; E : Autre Réponse

Question 12 : Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx$$

A) $\frac{3}{2}e - ln2$; B) $\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) + \frac{1}{e+1}$; C) $\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) + \frac{1}{e+1}$; D) $\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{1}{e+1}$; E) Autre Réponse

Question 13 : Calculer l'intégrale suivante : $\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnx\ dx$

A: $-13/4\, ln3 + 17/6\, ln2$; B : $-13/8\, ln3 + 17/3\, ln2$; C : $-13/8\, ln3 + 17/2\, ln2$;

D: $-13/8\, ln3 + 17/6\, ln2$; E: Autre Réponse.

Question 14 : Soit le système à 3 inconnues réelles x,y et z

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = -25 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x + 11y - 19z = 85 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de ce système est :

A : $\{(-z-1; 2z-8; z); z \in \mathbb{R}\}$; B : $\{(-z-1; 2z+8; z \in \mathbb{R})\}$; C : $\{(z+1; 2z+8; z); z \in \mathbb{R}\}$;

D: $\{(-1; 8; 0)\}$; E: Autre Réponse

Question 15 : Soit le système à 4 inconnues réelles x,y,z et t

$$\begin{cases} x-y+z-2t=-8 \\ 2x-y+3z+t=23 \\ 4x+3y+5z-3t=7 \\ 5x-2y+8z+5t=77 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de ce système est :

A :$\{(2z-3t+31;-z-5t+39;z;t);(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$; B :$\{(-2z+3t+31;z-5t+39;z;t);(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$;
C: $\{(-2z-3t+31;-z-5t+39;z;t);(z,t))\in\mathbb{R}^2\}$; D:$\{(28;34;0;1)\}$; E: Autre Réponse

Question 16 : Soit ***a*** un nombre réel et ***n*** un entier naturel non nul et soit ***f*** la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ de $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{1-(1+x)^{-n}}{x} & si\ x>0 \\ a & si\ x=0\end{cases}$

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0 est :
A : **a=-1** ; B : **a=0** ; D : **a=n+1** ; E : Autre Réponse

Question 17 :

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\ \text{et}\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

On pose : $B=\frac{1}{4}QAP$. B est alors égale à :

$A)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $B)\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ C)$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$

D)$\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ E) Autre Réponse

Question18 :
On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(0)=0 \quad et\ \forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f.
La tangente à (C_f) à l'origine a pour équation :

A) y=x B) y=-x C) y=x+1 D) y=0 E) Autre réponse

Question 19 : Soit P la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. P est inversible et son inverse P^{-1} est égale à

A) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$; B) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$; C) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$; D) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

E) Autre Réponse

Question 20 : on effectue des tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires. Soit X la variable aléatoire égale au rang de sortie de la première boule blanche, et Y la variable aléatoire égale au rang de sortie de la seconde boule blanche.

Après avoir déterminé la loi du couple (X,Y), calculer la covariance de X et Y, Cov(X,Y)

A/ $\frac{1}{2}$; B/ -3 ; C/ $-\frac{1}{2}$; D/ 0 ; E/ autre réponse