Mathématiques II

Épreuve 2011

Question 1 : On définit les fonctions ch et sh sur $\mathbf{IR}$, par : $cht = \frac{e^{r}+e^{-r}}{2}$ et $sht = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$.

On pose pour $t \in R$, M = $\begin{bmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{bmatrix}$,alors spectre de M ,est :

A) $\{e^{t}$,-$e^{t}\}$ B) $\{e^{-t}$,-$e^{t}\}$ C) {-e^{-t},-e^{t}} D) $\{e^{t}, -e^{-t}\}$ E) Autre

Question 2 : On note $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \, dx$, la somme de la série de terme général $\frac{I_n}{n!}$ est :

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) Autre

Question 3: Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $B = (e1, e2, e3, e4)$ une base orthonormale de E .On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme E associé à la matrice A relativement à la base B :

A) f est un endomorphisme non symétrique non nul et non inversible
B) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
C) f est un endomorphisme non symétrique non nul et inversible
D) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
E) Autre

Question 4 : On note F : $R^3 \rightarrow$R l'application définie ,pour $tout\ (x,y)\ \in\ R^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^3}$$

A) $F(x,y)\ =\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,(x^3 + 4xy\ + y^3) +\ x^3y^2$

B) $F(x,y)\ = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\,(x^2 + 4\,xy\ + y^3)\ +\ x^3y^3$

C) $F(x\,,y)\ =\ -\,\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(x^3 + 4xy + y^2)\ +\ x^2y^2$

D) $F(x,y)\ =\ \frac{3}{4}\ +\ \frac{1}{2}(\,x^2 + 4xy + y^2) +\ x^3y^3$

E) $F(x,y)\ = \frac{3}{4}\ +\ \frac{1}{2}\ (x^2 + 4xy + y^2)\ -\ x^2y^2$

Question 5 : Soit U et V deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $p_2\ et\ p_1$. Alors la covariance (cov (U , V)) de U et V vérifie :

A) $|\cos(U,V)| \leq \frac{1}{2}$ B) $|\cos(U,V\,)| \leq 1$ C) $|\cos(U,V\,)| \leq \frac{1}{4}$ D) $|\cos(\,U,V\,)| \leq \frac{1}{3}$ E) Autre

Question 6 : Pour $n \in N$, on pose $S_n = \sum_{K=0}^{n} \frac{k+1}{n^2+K^2+2k+1}$. La suite (S_n) converge vers :

A) $Ln\,2$ B) $\frac{1}{2}\ ln\ 2$ C) $-\,ln\ 2$ D) $-\,\frac{1}{2}\ ln\ 2$ E) $Autre$

Question 7 : Une variable aléatoire admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in R, f(x) = \frac{a}{1+4x^3}$$

.Pour que f soit effectivement une densité de probabilité , la constante a est :

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3}{\pi}$ E) Autre

Question 8 : On dispose de n urnes $U_1U_2 \ldots\ldots\ldots U_n$. Pour tout k de $\{1, 2, \ldots\ldots n\}$,l'urne k contient k boules numérotés de 1 à K .On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard .Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée. Alors la variance de Y est :

A) $\frac{(n-1)(7n+13)}{144}$ $B)\ \frac{(n+1)(7n+13)}{144}$ $C)\ \frac{(n-1)(7n-13)}{144}$ $D)\ \frac{(2n-1)(\,7n+13)}{144}$

D) Autre

Question 9: Soient les matrices P= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Et M telle que P^{-1}MP=D,

$\forall n \in N^*$: M^nest la matrice

A) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2-9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2-9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

B) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16\,(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2+9(\frac{1}{12})^n & 2+24(\frac{1}{24})^n & 2-9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

C) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2-9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2+9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

D) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6(\frac{1}{12})^n & 6-16(\frac{1}{12})^n & 6-6(\frac{1}{12})^n \\ 3-3(\frac{1}{12})^n & 3+8(\frac{1}{12})^n & 3-3(\frac{1}{12})^n \\ 2+9(\frac{1}{12})^n & 2-24(\frac{1}{12})^n & 2+9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$

Question 10 : Soit θ un paramétre inconnu strictement positif.On considére une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi de fonction de densité :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta}\left(1-\frac{x}{\theta}\right) & si \;\; 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Et pour tout n, on pose $Sn = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$ .Alors, le risque quadratique de Sn est :

A)$\frac{2\theta^2}{n}$, B)$\frac{\theta^2}{2n}$, C)$\frac{\theta^2}{n}$, D) $\frac{\theta^2}{3n}$, E) Autre

Question 11 : Soient X_1, X_2 ,X_3 trois variables aléatoires réelles ,discrètes et centrées.

$M = E(Xi, Xj) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Et Y une variable aléatoire centrée. On définit la fonction :

$$F(x_1, x_2, x_3) = E\left[\left(Y - \sum_{i=1}^{3} x_i X_i\right)^2\right]$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette un minimum (a,b,c) est :

A) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ B) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ -E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ C) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$

D) $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$ E) Autre

Question 12 : Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a(x^2)} exp\left\{a\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right\} & si\ x \in]0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et X une variable de fonction de densité f . On pose $Y = \dfrac{1}{X} - \left[\dfrac{1}{X}\right]$

$y = \dfrac{1}{X} - \left[\dfrac{1}{X}\right]$ *ou* $\lfloor\ \rfloor$ *désigne la partie entiére :*

Une fonction densité de Y est :

A) $\begin{cases} \frac{1}{1-e^{-a}}\, e^{-ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ B) $\begin{cases} \frac{a}{1+e^{-a}}\, e^{-ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ C) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^{-a}}\, e^{ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^{a}}\, e^{-ay} & si\ y€[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ E) *Autre*

Question 13 : Soit n>0 quelconque $et\ 0 < P < 1$, $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ,suivant la même loi uniforme sur {0, ...,n} et N_n une variable aléatoire indépendante des Xi suivant la loi binomiale B(n,p).

On pose $U_n = Max(X_0, \dots\dots, X_n)$, $V_n = \min\,(X_0 \dots\dots\dots . X_n)$ et $W_n = \min\,(X_0, \dots\dots . X_n)$ la fonction H_n de répartition de W_n est :

A)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

B)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1-p\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

C)$Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

D) $Hn(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+p\frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x \geq n \end{cases}$

E) Autre

Question 14 : Soit E l'espace vectoriel R$[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et le sous espace vectoriel de E des polynomes de degré inferieur ou égal à 3 .Soit f l'application nul,à tout P de E associe le polynome Q=f(p) définie par Q(X) =P(X) –P(X-1) .On appelle g la restriction de f à F :

A) La dimension de F est 3
B) f est une application linéaire de E dans F ?
C) ker(g)=R
D) la famille (1,X) est une base de Im(g) ?
E) Autre

Question 15 : On considère la fonction numérique f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}\ (1+x)^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)} & si\ x \neq\ 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$ Alors :

A) f est continue, dérivable en 0 et f'(0) = -1.
B) f est continue, est non dérivable en 0 .
C) f est continue, dérivable en 0 et f'(0)= 1
D) f est continue en 0
E) f est continue, dérivable en 0 et f'(0) = e

Question 16 : On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R_4(R)$

Et u l'endomorphisme associé relativement à la base canonique B de R^4. *Pour* $\boldsymbol{\lambda}$ **€R** ,on pose

$E_\lambda = \{\vec{x} \in IR^4\ Tel\ que\ u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$

A)$\lambda \notin \left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1\right\}$,alors E_λ est réduit au vecteur nul.

B), $\lambda \notin \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\}$ alors E_λ est réduit au vecteur nul.

C) $\lambda \notin \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$,alors E_λ est réduit au vecteur nul.

D) $\lambda \notin \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}$ alors E_λ est réduit au vecteur nul.

E) Autre

Question 17 : M_5 *(R) désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 5 .On note E l'ensemble des A de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Ou a et b sont deux réels quelconques. On note I l'élément de E obtenu pour a=1 et b=0 et J celui obtenu pour a=0 et b=1 .Alors, on *a pour p* entier naturel , on a :

A) $A^n = a^nI + \left(\frac{(a-2b)^n-a^n}{2}\right)J$ **B)** $A^n = a^nI + \left(\frac{(a+2b)^n+a^n}{2}\right)J$ **C)** $A^n = a^nI - \left(\frac{(a+2b)^n-a^n}{2}\right)J$

D) $A^n = a^nI + \left(\frac{(a+2b)^n-a^n}{2}\right)J$ E) Autre

__Question 18:__ Pour tout réel α non nul, on définit la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Alors les valeurs propres de A sont :

A) $\{-\alpha, 2\alpha\}$ B) $\{-\alpha, -2\alpha\}$ C) $\{\alpha, -2\alpha\}$ D) $\{-1,2\}$ E) Autre

__*Exercice 19 :*__ Soit X_1 , ...X_n n variables aléatoirement indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.Pour tout i compris entre 1 et n , on pose

$Y_i = \begin{cases} 1 & si\ X_i = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$ $et\ Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Un estimateur sans biais de exp(-θ) est :

A)$\frac{Z_n}{n}+1$ B) $\frac{Z_n}{n}$ -1 C) $\frac{Z_n}{n}$ D) $\frac{Z_n}{n-1}$ E)Autre

__*Exercice 20 :*__ Pour tout n€N^*,on note $u_n=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]=ln(n)$. Pour tout n€$N^*$,on note

$v_n=u_{n+1}$ - u_n.Alors u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$,à :

A) $\frac{1}{n^2}$ B)$\frac{1}{n^2}$ C)$\frac{1}{2n^2}$ D)$\frac{-2}{n^2}$ E)$\frac{-1}{2n^2}$