Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2011

MATHEMATIQUES I

DUREE : 4 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.

4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.

5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.

6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: − 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1: On joue à un jeu où la probabilité de gagner à une partie est de 1/4. Si le joueur gagne à une partie, il obtient un gain net de 600 DH, sinon il perd 300 DH (le gain du joueur à une partie est donc soit +600 DH, soit -300 DH). Si le joueur joue à 10 parties de ce jeu, alors l'espérance de son gain total est :

A) -1000 DH B) -750 DH C) +750 DH D) +1000 DH E) Autre réponse

Question 2: Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On extrait successivement et avec remise 3 boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule rouge : $P(X \geq 1)$?

A) $\frac{98}{125}$; B) $\frac{72}{125}$; C) $\frac{60}{125}$; D) $\frac{36}{225}$; E) Autre réponse

Question 3: Un jeu de hasard consiste d'abord à choisir, au hasard et de manière équiprobable, une boite parmi trois, désignées par A, B, et C; puis à sélectionner encore, au hasard et de manière équiprobable, dans la boite choisie, un bon qui est soit gagnant dit de type (G), soit perdant dit de type (P).

La boite A contient 2 bons gagnants et 8 bons perdants,

la boite B contient 3 bons gagnants et 7 bons perdants,

la boite C contient 4 bons gagnants et 6 bons perdants.

Un joueur vient d'être déclaré gagnant et on ne connaît pas la boite qu'il a choisie;

La probabilité qu'il ait choisi la boîte A est :

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{8}$ E) Autre réponse

$$f(t) = \begin{cases} 0, & si\ t \leq 1 \\ \frac{16\ lnt}{t^5}, & si\ t > 1 \end{cases}$$

f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X dont l'éspérance et la variance sont respectivement :

A) $E(X) = \frac{16}{9}$ et $V(X) == 4$

B) $E(X) = = \frac{16}{5}$. et $V(X) == 4$

C) $E(X) = = \frac{16}{9}$ et $V(X) == \frac{68}{81}$

D) $E(X) = = \frac{4}{3}$ et $V(X) == \frac{64}{9}$

E) Autre réponse

Question 5: n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant :

- une boule portant le numéro 1
- deux boules portant le numéro 2
- .....
- n boules portant le numéro n

On tire dix fois une boule avec remise dans cette urne, on note Y la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on a obtenu une boule numérotée n. L'espérance de Y est :

A) $10\ n(n+1)$

B) $\frac{20(n-1)}{(n+1)^2}$

C) $\frac{10(n-1)}{(n+1)^2}$

D) $\frac{20(n-1)}{(n+1)}$

E) Autre réponse

Question 6: Soit X une variable suivant une loi uniforme sur $\{-1, 0, +1\}$; On pose $Y=X^2$.

Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est égal à :

A)-0,5 B) 0 C) $+0,5$ D) $+\frac{35}{73}$ E) Autre réponse

Question 7: Un auditeur décide d'étudier l'ensemble des retours de marchandises défectueuses dans une entreprise de vente de matériel informatique par correspondance. Les ventes se répartissent ainsi (Les pourcentages s'entendent en nombre d'unités vendues). Sur une période d'un mois, pour 1200 unités vendues, il a été relevé les retours suivants :

Marchandise	% Ventes	Retours
Imprimantes	20%	4.
Ecrans cathodiques	18%	2
Ecrans plats	15%	8
Boîtiers	10%	2
Unités centrales	21%	4
Divers	16%	12
Total	100%	32

Quelle est la probabilité qu'un retour quelconque soit une imprimante ?

A) 0,025 ; *B*) 0,1503; *C*) 0,125 ; *D*) 0,25 ; *E*) *Autre réponse*

Question 8: Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Elle utilise les services des sociétés de transport A ou B.

La probabilité que la société A livre le colis avec retard est 0,1 ; alors que la probabilité que la société B livre le colis avec retard est 0,2. Les retards successifs sont supposés indépendants. Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société A dans 40% des cas, et la société B dans 60% des cas. Un jour donné, le colis arrive en retard. La probabilité qu'il ait été livré par la société A est :

A) $\frac{1}{21}$

B) $\frac{2}{21}$

C) $\frac{1}{11}$

D) $\frac{12}{21}$

E) Autre réponse

Question 9: On jette 2 fois de manière indépendante et successivement un même dé numéroté de 1 à 6; Chaque face a la même probabilité d'apparition.

On désigne par X_1 (respectivement X_2) le résultat du 1^er^ (respectivement 2^ème^ lancer).

On note $X=\text{Min}(X_1, X_2)$ et $Y=\text{Max}(X_1, X_2)$

X est le plus petit des 2 résultats, tandis que Y est le plus grand des 2 résultats (quand les résultats des deux lancers sont les mêmes, X et Y ont pour valeur ce résultat commun). En déterminant l'expression de XY en fonction de X_1 et X_2, en déduire que le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est égal à :

A)-0,5 B) 0 C) $+\frac{35}{73}$ D) $-\frac{35}{73}$ E) Autre réponse

Question 10: Un pépiniériste dispose d'un stock de plants. Chacun des plants fleurit une fois par an. Pour chaque plant, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est de $\frac{3}{4}$, et la probabilité de donner une fleur blanche est de $\frac{1}{4}$. Pour les années suivantes, pour tout entier naturel non nul n,

- Si l'année n, le plant a donné une fleur rose, alors il donnera une fleur rose l'année n+1
- Si l'année n, le plant a donné une fleur blanche, alors il donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur blanche ou une fleur rose.

On note p_n la probabilité de l'évènement R_n « le plant donne une fleur rose la $n^{\text{ième}}$ année ». Après avoir exprimé p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de n, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} p_n$$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{1}{4}$

D) 1

E) Autre réponse

Question 11: Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que :

X suit une loi binomiale de paramètres n et p_1 (notée B (n , p_1) avec $p_1 \in]\,0\,,1\,[$).

Y suit une loi binomiale de paramètres n et p_2 (notée B (n , p_2) avec $p_2 \in]\,0\,,1\,[$).

On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par : $Z = 2n - X - Y$

La probabilité de l'événement $(Z = 2n-1)$ est alors égale à :

A) $(p_1 p_2)^n$ B) $((1-p_1)\,p_2)^n$ C) $(p_1(1-p_2))^n$ D) $((1-p_1)(1-p_2))^n$ E) Autre réponse

Question 12: Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 , la matrice A^n est égale à :

A) $\begin{pmatrix} 0 & n & -\frac{\sqrt{n}}{2} \\ -n & 0 & (\frac{1}{2})^n \\ -\frac{\sqrt{n}}{2} & (\frac{1}{2})^n & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{n}}{2} \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \\ -\frac{\sqrt{n}}{2} & (\frac{1}{2})^n & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ -n & 0 & (\frac{1}{2})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & n & -\frac{\sqrt{n}}{2} \\ -n & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{n}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$; E) Autre réponse

Question 13: On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$A^n = a_n A^2 + b_n A$ avec

A) $\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$

B) $\begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$

C) $\begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+1} = 2 a_n. \end{cases}$

D) $\begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$

E) Autre réponse

Question 14: Soit n un entier naturel, alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k =$

A)-1 B) 0 C) 1 D) $(-2)^n$ E) Autre réponse

Question 15: Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+5z = 0 \\ 2x-y+5z = 1 \\ x-3y = 1 \\ -x+2y-z = m \end{cases}$$ *où m est un paramètre réel*

Pour quelle valeur de m le système (S) admet une infinité de solutions ?

A) $m = 1$; *B)* $m = -1$; *C)* $m = -\frac{4}{5}$; *D)* $m = \frac{1}{2}$; *E) Autre réponse*

Question 16: Soit f une fonction polynomiale réelle vérifiant $f(x+1)=f(x)$ pour tout réel x et $f(2)=6$, alors $f(\frac{5}{2})$ est égal à

A) $\frac{13}{2}$ B) 0 C) 6 D) $-\frac{13}{2}$ E) Autre réponse

Question 17: Soit f_n la fonction définie pour tout réel x et tout entier naturel n par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

Après avoir étudié la convergence de u_n et exprimé $(u_n - u_{n-1})$ en fonction de n, déduire si :

A) La suite u_n est divergente

B) La suite u_n converge vers 1

C) La suite u_n converge vers e^{-1}

D) la suite u_n converge vers 0

E) Autre réponse

Question 18: Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul et soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-(1+x)^{-n}}{x} & si\ x \succ 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0 est :

A) $a=-1$ B) $a=0$ C) $a=n+1$ D) $a=n-1$ E) Autre réponse

Question 19: Soient a , b et c trois nombres réels vérifiant la condition :

$a + bx + cx^2 > 0$, pour tout $x \geq 1$

On considère la fonction :

$$f : I = [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{a + bx + cx^2}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

On suppose que : $f(2) = \frac{\ln 2}{8}$; $f(3) = \frac{\ln 3}{15}$; $f(4) = \frac{\ln 4}{24}$

On en déduit alors que le coefficient :

A) b=0 B) b=1 C) b=2 D) b= 3 E) Autre réponse

Question 20: Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_o = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad \textit{pour tout } n \in IN \end{cases}$

La suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ est une suite géométrique de raison q.

Quelle est la valeur de q ?

A) $q = \frac{3}{4}$; *B)* $q = 2$; *C)* $q = -\frac{1}{3}$; *D)* $q = \frac{1}{5}$; *E)* $q =$ *Autre réponse.*