جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

المدرسة الوطنية العليا للفنون و المهن
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

ensam
CASABLANCA

CONCOURS D'ACCES A L'ENSAM-MEKNES ET A L'ENSAM-CASABLANCA

Epreuve de Mathématiques : Filière Sciences Mathématiques A et B
Vendredi 24 Juillet 2015 - Durée : 2h

Partie I : Questions à réponses précises

Chaque réponse est notée sur 2pts

	Questions	Réponses
Q1	Soit la proposition P: " $\forall a \in \mathbb{R}_+^*;\ a+\frac{1}{a} \geq 2$ ". Donner la négation et le tableau de vérité de la proposition P.	$\overline{P}$: " $\exists a \in \mathbb{R}_+^*;\ a+\frac{1}{a} < 2$ " P est vraie
Q2	Le code confidentiel d'une carte bancaire est constitué d'un nombre de 4 chiffres non nuls. Combien y-a-t-il de codes contenant une fois, et une seule, le chiffre 1 ?	$4 \times 8^3 = 2048$
Q3	Soient les nombres complexes suivants : $z = e^{\frac{2\pi}{7}i}$, $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$. Sachant que $a + b = -1$ et $\overline{b} = a$, donner la valeur de la somme $S = cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.	$S = -1/2$
Q4	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$. Donner la forme trigonométrique de $z = \frac{c-a}{b-a}$, et déduire l'angle θ de la rotation qui transforme B en C.	$z = [1, \pi/3]$ $\theta = \pi/3$
Q5	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\mathbf{3^{cos\,(x)} + 3^{cos(\pi - x)+1} \leq 2\sqrt{3}}$.	$S = \{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Q6	Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$; où $f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{2x^2}$.	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3/4$
Q7	Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} + 1$ si $x > 0$ et $g(0) = a \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de a pour que g soit continue sur $[0, +\infty[$.	$a = 1$
Q8	Soit $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer f^{-1}.	$Df^{-1} =]0, +\infty[$ $f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$
Q9	Déterminer la primitive F de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ qui vaut 1 en e.	$F(x) = \ln(\ln(x)) + 1$
Q10	Calculer, en utilisant les sommes de Riemann, la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.	$\lim\limits_{n} u_n = \pi/4$
Q11	Soient $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - Arctan(x)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$. Calculer l'aire A de la surface délimitée par C_f et les droites $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.	$A = \pi/4 - \ln(2)$
Q12	Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x)\, dx$, $\forall n \geq 1$. Calculer $\lim_n I_n$.	$\lim\limits_{n} I_n = 0$
Q13	Sachant que $x \mapsto sin^2(x)$ est une solution de l'équation différentielle (E): $y'' + 4y - 2 = 0$, déterminer la solution particulière y_0 de (E) telle que sa courbe passe par $A(0, \sqrt{2})$ et ayant une tangente en A de coefficient directeur 1.	$y_0 = \sin^2(x) + \sqrt{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$
Q14	Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation cartésienne: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$. Déterminer l'équation (E) du plan tangent $\mathcal{P}$ à $\mathcal{S}$ au point $O(0,0,0)$.	(E): $x + y = 0$
Q15	Sachant que $10^{3n} \equiv 1[27]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste r de la division euclidienne de $10^{100} + 100^{10}$ par 27.	$r = 2$
Q16	Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 - 2y^2 + xy + 2 = 0$	$S = \{(0,1), (0,-1), (-1,1), (1,-1)\}$
Q17	Une usine produit des pièces dont 2% sont défectueuses. Après contrôle, on s'est aperçu que 97% des pièces bonnes sont acceptées et 99% des pièces défectueuses sont rejetées. Quelle est la probabilité P d'avoir une pièce bonne et rejetée ?	$P = \frac{98}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{294}{10000}$

Partie II : Questions à choix multiples

*Une réponse correcte = **2pts**, aucune réponse = **0pts**, plus d'une réponse ou une réponse fausse = **- 1pt***

Q18. Soit $M_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ vérifie :

- [ ] $A^3 \neq 2I$
- [ ] A non inversible
- [ ] $\{I, A^3\}$ libre dans $M_3(\mathbb{R})$
- [X] A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$

Q19. Soient l'espace vectoriel réel $E = \{f : x \mapsto (ax+b)e^{2x}; a, b \in \mathbb{R}\}$ et f_1 et f_2 les deux éléments de E définies par : $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$. Soit $B = \{f_1, f_2\}$ et $g : x \mapsto \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right) e^{2t} dt$. Alors

- [ ] les vecteurs f_1 et f_2 sont liés
- [ ] $g \notin E$
- [X] B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
- [ ] B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $(0,1)$

Q20. On considère le disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et la proposition P: "$\exists A, B \subset \mathbb{R};\ D = A \times B$". Alors

- [ ] $(1,0) \in D$ et P est vraie
- [ ] $(0,1) \in D$ et P est vraie
- [X] P est fausse
- [ ] aucune des trois réponses

Q21. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. L'équation : $f(x) = 1 - x^n, n \geq 1$

- [ ] n'a pas de solution
- [ ] admet deux solutions distinctes
- [ ] admet une solution unique
- [X] aucune des trois réponses

Q22. Soit $f(x) = x - ln|2e^x - 1|$. Alors

- [ ] f bornée au voisinage de $-\infty$
- [ ] f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$
- [X] f bornée au voisinage de $+\infty$
- [ ] aucune des trois réponses

Q23. Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \ln(x)$. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f

- [X] admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = 0$
- [ ] admet une asymptote oblique en $+\infty$
- [ ] est au-dessus de la droite $y = 0$
- [ ] aucune des trois réponses

Q24. L'équation $cos^4(x) + sin^4(x) = 1$ admet dans $[-\pi, \pi]$

- [ ] une infinité de solutions
- [ ] 8 solutions
- [X] 4 solutions
- [ ] aucune solution

Q25. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Alors le nombre $N = a^4 + 4b^4$ vérifie :

- [ ] $N < (a-b)^2 + b^2$
- [ ] $N < (a+b)^2 + b^2$
- [ ] N est premier
- [X] N n'est pas premier