

Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Jeudi 26 Juillet 2012 - Durée : 2h 00mn

|| Questions à réponse précise, Partie A ||

NB : Chaque question est notée sur (1Pt)

Questions	Réponses
Trouver la période T de la fonction suivante : $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)$	$f(x+4\pi) = \sin\left(2\pi + \frac{x}{2}\right) + \cos(x+4\pi)$ $= f(x)$ $\Rightarrow T = 4\pi$
Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\cos^4(4x) - \sin^4(4x) = 1$	$S = \left\{ \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(1+i)^9 = a+ib$	$a = b = 16$
Calculer $C = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$	$C = +\infty$
Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} , calculer la dérivée de $g(x) = \exp\left((f(x^2))^2\right)$	$g'(x) = 4x f(x^2) \cdot f'(x^2) g(x)$
Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ avec $x \in E$, trouver $f(E)$	$f(E) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
Trouver les maximums et les minimums de la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x + x $	$\text{Max}_{x \in [-1, 1]} f(x) = 3$ $\text{Min}_{x \in [-1, 1]} f(x) = 0$
On donne les points $A(1,2)$, $B(-2,1)$ et $C(0,4)$. Déterminer l'angle \widehat{BAC} en radian	$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = 0,02$ $\widehat{BAC} = 1,55 \text{ rad}$
Soit x un réel positif. Combien y-a-t-il d'entiers naturels multiples de 3 entre 0 et x ?	Le nombre des entiers multiples de 3 entre 0 et x est : $E\left(\frac{x}{3}\right) + 1$
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$	Le quotient : $x^3 - 2x^2 - 14x - 63$ Le reste : $-268x + 264$

|| Questions à réponse précise, Partie B ||

NB : Chaque question est notée sur (2Pts)

Questions	Réponses
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$. on pose $I = \int_a^b f(x)dx$ et $J = \int_a^b xf(x)dx$. Calculer J en fonction I .	$u = a+b-t$ $J = \int_a^b xf(x)dx = \int_b^a -(a+b-t)f(t)dt$ $= (a+b)I - J$ $\Rightarrow J = \frac{a+b}{2} I$
Soit E un ensemble, et A, B deux sous ensembles de E . On appelle différence symétrique de A et B , notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de $E : A\Delta B = \{x \in A \cup B / x \notin A \cap B\}$. Calculer $A\Delta E$ et $A\Delta C_E^A$	$A\Delta \bar{A} = A\Delta C_E^A = \Omega$ $A\Delta E = (A \cup \Omega) \setminus (A \cap \Omega) = \Omega \setminus A = \bar{A}$
Le périmètre d'un triangle isocèle vaut 1. Déterminer les dimensions de ce triangle pour que son aire soit la plus grande possible.	<p>On a $S(u) = (\frac{1}{2} - u)\sqrt{u - \frac{1}{4}}$ et sur $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$</p> $S'(u) = \frac{1-3u}{\sqrt{4u-1}}, S'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{3}$ $AB = AC = BC = \frac{1}{3}$
On note $u_n = 25^n + 2^{3n+4}$. Trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$	$a = 33 \text{ et } b = -200$
Calculer $D = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-2} dx$	$D = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}-1)$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. Soit k un entier compris entre 1 et n . Utiliser l'égalité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ pour calculer S_n .	$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Soit x un réel et $E(x)$ la partie entière de x . Déterminer $F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) + \dots + E(nx)}{n^2}$	$F = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{x}{2}$
De combien de façon peut-on payer 10 DHS avec des pièces de 10 et 20 centimes ? (1 DH = 100 centimes)	$(0,50); (1,40); \dots; (50,0)$, Par suite le nombre de façon est : 51 façons
Soient x_1, x_2 et x_3 les racines de $x^3 + 2x - 1 = 0$, calculer $X = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$
Le 1 ^{er} juin 2012, les participants d'un club d'astronomie ont observé le corps céleste A qui apparaît tout les 51 jours. Le 28 juin 2012, ils ont observé le corps céleste B , qui apparaît tout les 72 jours. A quelle date devront-ils fixer une nouvelle réunion pour observer simultanément les deux corps?	<p>On pourra observer simultanément les deux corps le:</p> <p align="center">31 octobre 2012</p>
Déterminer un cercle de centre Ω et de rayon R tangent aux trois droites d'équations respectives : $y = 2x + 1, y = 2x + 7$ et $y = -\frac{1}{2}x$	$\Omega(-1, 2)$ et $R = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ $\Omega(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$ $R = \frac{3\sqrt{5}}{5}$