Correction du Concours d'entrée en 1[ère] année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2013-2014

Correction mathématique

Exercice 1 :

Q1 . Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \\
&= \frac{u_n^2}{v_n^2} \\
&= x_n^2
\end{aligned}
$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; f(x) = x^2$.

On a $f([0;1]) = [0;1]$ et $x_0 = \dfrac{\alpha}{\beta} \in]0;1[$.

Donc par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N} ; x_n \in [0;1]$.

Or $\forall x \in [0;1]; f(x) - x \leq 0$, alors la suite (x_n) est décroissante.

D'autre part, on a (x_n) est minorée par 0, donc elle est convergente.

On pose $l = lim(x_n)$. On a $f(l) = l$ et $l \in [0;1]$.

On a $\forall x \in [0;1]; f(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$,Or (x_n) est décroissante alors $l = 0$.

Autrement si $l = 1$ alors $l \leq x_0 \prec 1$.Absurde.

Q2 . Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\
&= \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} \\
&= u_n + v_n \\
&= y_n
\end{aligned}
$$

Donc la suite (y_n) est constante, alors $\forall n \in \mathbb{N}\,; y_n = y_0 = \alpha - \beta$.

Ainsi $lim(y_n) = \alpha - \beta$

Q3. On a $\forall n \in \mathbb{N}\,;;\, u_{n+1} = x_n v_n = x_n(u_n - y_n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\,; u_n(x_n - 1) = x_n y_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}\,; x_n \le x_0 \prec 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}\,; u_n = \dfrac{x_n y_n}{x_n - 1}$

Ainsi la suite (u_n) comme produit de suites convergentes et on a $lim(u_n) = 0$

Q4. La suite (v_n) :

$\forall n \in \mathbb{N}\,; v_n = u_n - y_n$. Alors (v_n) convergente comme somme de suites convergentes. Et on a $lim(v_n) = -lim(y_n) = \beta - \alpha$

Q5.

Soit δ un élément de $]0,1[$

= +

=0 et = = =

= 1

Donc

Exercice 2

Q6 . Calculons $\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt$.

Posons $\begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \cos(2t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$

Donc $\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t \sin(2t)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^t \sin(2t)\,dt$

De même $\int_0^{\pi} e^t \sin(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^t \cos(2t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt$

Alors $\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t \cos(2t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\left[e^t \sin(2t)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt$

D'où $\frac{5}{4}\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t \sin(2t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\left[e^t \cos(2t)\right]_0^{\pi} = \frac{e^{\pi}-1}{4}$.

Ainsi $\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt = \frac{e^{\pi}-1}{5}$

Q7 . On a $\forall t \in \mathbb{R};\ \cos^2(t) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2t)\right)$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^t \cos^2(t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(e^t - e^t\cos(2t)\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} e^t dt - \int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\pi} - 1 - \frac{e^{\pi}-1}{5}\right) \\ &= \frac{3\left(e^{\pi}-1\right)}{3}\end{aligned}$$

Exercice 3

Q8 . f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que : $\forall x \in [a,b], f(a+b-x) = f(x)$.

On a $\int_a^b tf(t)\,dt = \int_a^b tf(a+b-t)\,dt$

Posons $u = a+b-t$. Donc $du = -dt$

$$\begin{aligned}\int_a^b tf(t)\,dt &= -\int_b^a (a+b-u)f(u)\,du \\ &= -\int_b^a (a+b)f(u)\,du + \int_b^a uf(u)\,du \\ &= (a+b)\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b tf(t)\,dt\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b tf(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt$

Q9. On a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^\pi \frac{\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^\pi \\ &= \frac{2\arctan\left(\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Q10. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $\forall t \in [0;1],\ f(t) = \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}$.

On a $\forall t \in [0;1],\ f(\pi+0-t) = \frac{\sin(\pi-t)}{3+\cos^2(\pi-t)} = \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}$

donc $\forall t \in [0;1],\ f(\pi+0-t) = f(t)$

Alors d'après la question précédente on a :

$$\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi} tf(t)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$$

Exercice 4

Q11. On a $a = \dfrac{\sqrt[3]{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$, $b = \dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ et $\lambda = a+b$.

On a $ab = \dfrac{\sqrt[3]{\left(41\sqrt{5}+54\sqrt{3}\right)\times\left(54\sqrt{3}-41\sqrt{5}\right)}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{54^2\times 3-41^2\times 5}}{3} = \dfrac{7}{3}$

Q12 . On a

$$\lambda^3 - 7\lambda = (a+b)^3 - 7(a+b)$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-7a-7b$$
$$= a^3+3a\times\frac{7}{3}+3b\times\frac{7}{3}+b^3-7a-7b$$
$$= a^3+b^3$$
$$= \frac{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}+54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$
$$= 36$$

Donc $\lambda^3 - 7\lambda - 36 = 0$

Q13

- On a $0^3 - 7\times 0 - 36 = -36$ alors $\lambda \neq 0$.
- donc λ est impaire

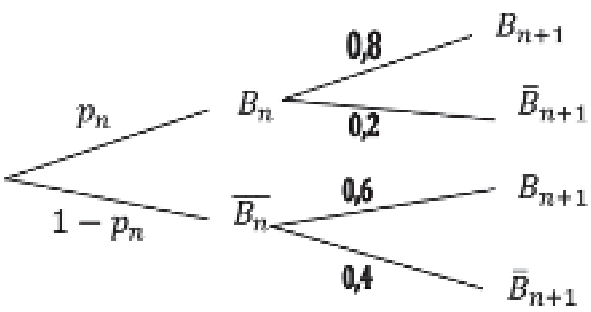
Exercice 5

Q14.

$$p_2 = p\left(B_2/B_1\right) \times p\left(B_1\right) + p\left(B_2/\overline{B_1}\right) \times p\left(\overline{B_1}\right)$$
$$= 0,8 \times 0,1 + 0,6 \times 0,9$$
$$= 0,62$$

Q15. On à :

Avec,



Q16. D’après la question précédente on écrit :

Exercice 6

Q17. Soit $M(z)$ un point invariant par f, alors $f(M) = M$.

On a :

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 6iz + 7 = 0$$

On a $\Delta = (-6i)^2 - 28 = -64 = (8i)^2$

Alors

$$f(M)=M \Leftrightarrow z=\frac{6i-8i}{2} \ ou\ z=\frac{6i+8i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=-i \ \ ou \ \ z=7i$$

Donc $\operatorname{Im}(z_B)+\operatorname{Im}(z_c)=-1+7=6$.

Q18 . On a $z_B=7i$ et $z_B=-i$.

On a le cercle ε et de diamètre $R=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}|z_B-z_C|=4$ et de centre $\Omega(3i)$.

Ainsi si $M(z)\in\varepsilon$ alors $\exists\theta\in\mathbb{R}$, $z=3i+4e^{i\theta}$ ou $z=3i+4e^{-i\theta}$.

Q19. On a

$$\begin{aligned} z' = \frac{3iz-7}{z-3i} &= \frac{-9+12ie^{i\theta}}{4e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{4}\left(12i-16e^{-i\theta}\right) \\ &= 3i-4e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Q20. On a

$$\begin{aligned} z' &= 3i-4e^{-i\theta} \\ &= 3i+4e^{i\pi}e^{-i\theta} \\ &= 3i+4e^{i(\pi-\theta)} \\ &= 3i+4e^{i\theta'} \quad (\theta'=\pi-\theta) \end{aligned}$$

Alors $M'\in\varepsilon$

Correction du Concours d'entrée en 1ère année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2013-2014

Fiche de réponses

Epreuve de Mathématique (Durée 1h : 30min)

Nom :……………………………………………
Prénom :……………………………………….. Note …………………….
C. N. E. :……………………………………….
N° d'examen : ………………………………….

Remarques Importantes :

1) La documentation, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
2) Parmi les réponses proposées il n'y en a qu'une qui est juste.
3) Cochez la case qui correspond à la réponse correcte sur cette fiche.
4) Réponse juste = 1 point ; Réponse fausse = - 1 point ; Pas de Réponse = 0 point.
Noter Bien : Plus qu'une case cochée = - 1 point.

	A	B	C	D
Q1			×	
Q2	×			
Q3			×	
Q4		×		
Q5	×			
Q6				×
Q7			×	
Q8	×			
Q9		×		
Q10		×		
Q11			×	
Q12	×			
Q13			×	
Q14				×
Q15			×	
Q16		×		
Q17		×		
Q18			×	
Q19	×			
Q20			×	

R^+	R^-