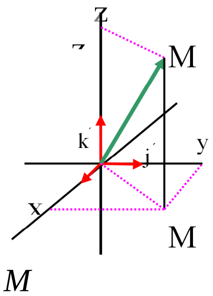
ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية
من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس تحليلية الفضاء

1)تعريف: اذا كان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاثة متجهات الفضاء.غير مستوائية و O نقطة من نقول إن المثلوث $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس للفضاء ، و أن المربوع $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم في الفضاء.

ملحوظة: أربع نقط O و A و B و C غير مستوائية تحدد لنا أساسا مثلا : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

و معلما في الفضاء مثلا : $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.



2)خاصية: ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما في الفضاء

لكل نقطة M من الفضاء توجد ثلاث أعداد حقيقية x و y و z بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

و لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء يوجد مثلوث وحيد $(x;y;z)$ بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

- o $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و نكتب $M(x;y;z)$.
- o x يسمى أفصول النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- o y يسمى أرتوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- o z يسمى أنسوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- o $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و نكتب $\vec{u}(x;y;z)$.

3)خاصية: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و I منتصف القطعة $[AB]$

1) مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

2) مثلوث إحداثيات النقطة I هو $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

3) المسافة: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

في كل ما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

4)شرط استقامية متجهتين

خاصية1: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين غير منعدمتين.

المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $x'=kx$ و $y'=ky$ و $z'=kz$

خاصية2: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من الفضاء .

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان إذا وفقط إذا كانت :

$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$

ملاحظة : لكي نبين أن ثلاث نقط A و B و C مستقيمية يكفي أن نبين أن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين

مثال : نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات $\vec{u}(1;-1;2)$ و $\vec{v}(-2;2;-4)$ و $\vec{w}(1;1;2)$

1) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$

الأجوبة : 1)نحسب المحددات المستخرجة :لدينا

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ و $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$ و $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

2) نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$ غير مستقيميتين

5)متجهات مستوائية:

تعريف: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ و $\vec{w}(x'';y'';z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء .

العدد الحقيقي: $x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$

يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ونرمز له

بأحد الرمزين : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

ومنه لدينا : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$

مثال: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(0;-4;4)$ و $\vec{w}(-2;0;4)$

أحسب محددة المتجهات : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-1\times-16-1\times 8+1\times(-8)=16-16=0$$

خاصية: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$

نتيجة : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غيرمستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$

ملاحظة : لكي نبين أن أربع نقط A و B و C و D مستوائية يكفي أن نبين أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مستوائية

6)تمثيل بارامتري لمستقيم في الفضاء:

تعريف: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة من الفضاء.

النظمة: $(t\in\mathbb{R})\ \begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارا متريا للمستقيم $D(A;\vec{u})$ المار من A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له.

7) تمثيل بارامتري لمستوى في الفضاء

تعريف: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين غير مستقيمتين.

النظمة التالية : $(P): \begin{cases} x=x_A+at+a't' \\ y=y_A+bt+b't' \\ z=z_A+ct+c't' \end{cases}$

حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى $P(A;\vec{u};\vec{v})$ المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

مثال : حدد تمثيلا بارا متريا للمستوى $P(A;\vec{u};\vec{v})$ حيث: $A(1;-3;1)$ و $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

الجواب : $(P):\begin{cases} x=1-2t-t' \\ y=-3+4t \\ z=1+t+2t' \end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارا متريا للمستوى $P(A;\vec{u};\vec{v})$

8) معادلة ديكارتية لمستوى

مثال: حدد معادلة ديكارتيه للمستوى (P) المار من $A(1;-3;1)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

الجواب : نلاحظ أن $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(A;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y+3 & 4 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=0$

يعني : $8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0$ يعني : $8x-8+3y+9+4z-4=0$

يعني : $(P): 8x+3y+4z-3=0$

تعريف: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غيرمستقيمتين. ومعادلة ديكارتيه للمستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.

خاصية: مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة : $ax+by+cz+d=0$ بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي مستوى

9) الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

خاصية: ليكن $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(Q)=P(B;\vec{u}';\vec{v}')$ مستويين من الفضاء لدينا :

1. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')=0$
فان : (P) و (Q) منطبقان أو متوازيان قطعا.
2. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')\neq0$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')\neq0$
فان : (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم.

ملحوظة: ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين : $(P): ax+by+cz+d=0$ مع $(a;b;c)\neq(0;0;0)$
و $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

1. يكون المستويان (P) و (P') متقاطعين إذا وفقط إذا كان : $ab'-ba'\neq0$ أو $ac'-ca'\neq0$ أو $bc'-cb'\neq0$.
2. يكون المستويان (P) و (P') متوازيين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$.
3. يكون المستويان (P) و (P') منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث :
$a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'=kd$

مثال : $(Q): x-y-2z-3=0$ و $(P): 3x-3y-6z-2=0$

الجواب : المستويان (P) و (P') متوازيين قطعا $k=3$

10) معادلتان ديكارتيتان لمستقيم

تعريف وخاصية: ليكن $D(A;\vec{u})$ المستقيم المار من $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له.

- إذا كانت: $a\neq0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$ فان النظمة:
$\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$
تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D
- إذا كان أحد الأعداد a أو b أو c منعدما (مثلا $a=0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D
- إذا كان عددان من الأعداد a أو b أو c منعدمان (مثلا $a=0$ و $b=0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $y=y_A$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D .

11) الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء- دراسة تحليلية:

مثال1: $(P): 3x-y-2z-2=0$ و $(D)\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P): x+y-z+1=0$ اذن : $(1+t)+(2-t)-(3+2t)t+1=0$

يعني $t=\frac{1}{2}$ اذن : (D) يقطع المستوى (P) في النقطة :

$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ y=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ z=3+2\frac{1}{2}=4 \end{cases}$ $A\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};4\right)$ هي نقطة التقاطع

مثال2: $(P): 3x-y-2z-2=0$ و $(D)\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-2+4t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P): 5x+2y-3z-10=0$ اذن :

$5(1+2t)+2(-1+t)-3(-2+4t)t-10=0$ يعني $-1=0$ غير ممكن

اذن : (D) و (P) متوازيان قطعا

خاصية: ليكن $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\in(P)$ فان $(D)\subset(P)$
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\notin(P)$ فان (D) يوازي (P) قطعا
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq0$ فان (D) يخترق (P).