| أكاديمية الجهة الشرقية<br>نيابة وجدة | مادة الرياضيات | المستوى : الأولى باك علوم تجريبية<br>الأستاذ : عثماني نجيب<br>مذكرة رقم /12 |
|---|---|---|

# مذكرة رقم 12 في درس تحليلية الفضاء

## الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم؛ إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس؛ إحداثيات $\vec u+\vec v$ و $\lambda\vec u$ ؛ إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ ؛<br>- محددة ثلاث متجهات؛<br>- تمثيل بارامتري لمستقيم؛ الأوضاع النسبية لمستقيمين؛<br>- تمثيل بارامتري لمستوى؛<br>- معادلة ديكارتية لمستوى؛ الأوضاع النسبية لمستويين<br>- معادلتان ديكارتيتان لمستقيم؛<br>- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى. | - ترجمة مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية والهندسة المتجهية بواسطة الإحداثيات؛<br>- البرهنة على استقامية متجهتين؛<br>- البرهنة على استوائية ثلاث متجهات؛<br>- اختيار التمثيل المناسب (ديكارتي أو بارامتري) لدراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات وفي تأويل النتائج. | - يتم تحديد المعلم والأساس انطلاقا من أربع نقط غير مستوائية؛<br>- يتم استعمال الإسقاط عل مستوى بتواز مع مستقيم لتقديم إحداثيات نقطة (دون الإفراط في تناول الإسقاط)؛<br>- يتم التركيز على الأداة التحليلية في دراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء. |

### I. إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم ، إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

▪ **الأساس و المعلم في الفضاء**

اذا كان $\vec i$ و $\vec j$ و $\vec k$ ثلاثة متجهات غير مستوائية و $O$ نقطة من الفضاء.

نقول إن المثلوث $(\vec i;\vec j;\vec k)$ أساس للفضاء ، و أن المربوع $(O;\vec i;\vec j;\vec k)$ معلم في الفضاء.

**ملحوظة:** أربع نقط $O$ و $A$ و $B$ و $C$ غير مستوائية تحدد لنا أساسا مثلا : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

و معلما في الفضاء مثلا : $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.

**خاصية:** ليكن $(O;\vec i;\vec j;\vec k)$ معلما في الفضاء

لكل نقطة $M$ من الفضاء توجد ثلاث أعداد حقيقية $x$ و $y$ و $z$ بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec i+y\vec j+z\vec k$

و لكل متجهة $\vec u$ من الفضاء يوجد مثلوث وحيد $(x;y;z)$ بحيث : $\vec u=x\vec i+y\vec j+z\vec k$

- o $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات النقطة $M$ بالنسبة للمعلم $(O;\vec i;\vec j;\vec k)$ و نكتب $M(x;y;z)$.
- o $x$ يسمى أفصول النقطة $M$ بالنسبة للمعلم $(O;\vec i;\vec j;\vec k)$.
- o $y$ يسمى أرتوب النقطة $M$ بالنسبة للمعلم $(O;\vec i;\vec j;\vec k)$.
- o $z$ يسمى أنسوب النقطة $M$ بالنسبة للمعلم $(O;\vec i;\vec j;\vec k)$.
- o $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec u$ بالنسبة للأساس $(\vec i;\vec j;\vec k)$ و نكتب $\vec u(x;y;z)$.

**تمرين1:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec i;\vec j;\vec k)$ النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ بحيث :

$\overrightarrow{OA}=\vec i+2\vec j-3\vec k$ و $\overrightarrow{OB}=2\vec i+5\vec j+3\vec k$ و

$\overrightarrow{OC}=\vec i-4\vec j+2\vec k$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec i+2\vec j+5\vec k$

1) حدد إحداثيات $A$ و $B$ و $C$ و $D$ في المعلم $(o;\vec i;\vec j;\vec k)$

2) حدد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\vec u=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ في الأساس $(\vec i;\vec j;\vec k)$.

**أجوبة: 1)** $\overrightarrow{OA}=\vec i+2\vec j-3\vec k$ يعني $A(1;2;-3)$

$\overrightarrow{OB}=2\vec i+5\vec j+3\vec k$ يعني $B(2;5;3)$

$\overrightarrow{OC}=\vec i-4\vec j+2\vec k$ يعني $C(1;-4;2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$ يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OA}$

يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=3\vec i+2\vec j+5\vec k+\vec i+2\vec j-3\vec k=4\vec i+4\vec j+2\vec k$

يعني $D(4;4;2)$

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\vec i+2\vec j-3\vec k)+2\vec i+5\vec j+3\vec k$

$\overrightarrow{AB}=-\vec i-2\vec j+3\vec k+2\vec i+5\vec j+3\vec k=\vec i+3\vec j+6\vec k$ ومنه $\overrightarrow{AB}(1;3;6)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-(\vec i+2\vec j-3\vec k)+\vec i-4\vec j+2\vec k$

$\overrightarrow{AC}=-\vec i-2\vec j+3\vec k+\vec i-4\vec j+2\vec k=0\vec i-6\vec j+5\vec k$ ومنه $\overrightarrow{AC}(0;-6;5)$

$\vec u=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ يعني $\vec u=\vec i+3\vec j+6\vec k-2(0\vec i-6\vec j+5\vec k)$

يعني $\vec u=\vec i+3\vec j+6\vec k-2(0\vec i-6\vec j+5\vec k)=\vec i+15\vec j-4\vec k$ ومنه $\vec u(1;15;-4)$

▪ **إحداثيات منتصف قطعة و المسافة بين نقطتين**

**خاصية:** لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى المعلم $(O;\vec i;\vec j;\vec k)$ و $I$ منتصف القطعة $[AB]$

1) مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

2) مثلوث إحداثيات النقطة $I$ هو $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

3) المسافة: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

**مثال :** $A(-3;2;1)$ و $B(5;3;-1)$ حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ و مثلوث إحداثيات $I$ منتصف القطعة $[AB]$ و المسافة $AB$

**الجواب :** $\overrightarrow{AB}(5+3;3-2;-1-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(8;1;-2)$

يعني $I\left(\frac{5+(-3)}{2};\frac{3+2}{2};\frac{-1+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{5}{2};0\right)$

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(5+3)^2+(3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{64+1+4}=\sqrt{69}$$

**في كل ما يلي الفضاء منسوب إلى معلم** $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

## II. محددة ثلاث متجهات في الفضاء

### 1. شرط استقامية متجهتين

**خاصية1:** لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين غير منعدمتين.

المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k$ بحيث : $x'=kx$ و $y'=ky$ و $z'=kz$

**ملحوظة:** إذا كانت جميع إحداثيات كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمة فان : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا كانت $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}$

**خاصية2:** لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من الفضاء .

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان إذا وفقط إذا كانت :

$\begin{vmatrix} y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=0$

**مثال:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات

$\vec{u}(1;-1;2)$ و $\vec{v}(-2;2;-4)$ و $\vec{w}(1;1;2)$

1) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$

**الأجوبة :** 1) نحسب المحددات المستخرجة: لدينا:

$\begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}=2-2=0$ و $\begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}=-4+4=0$ و $\begin{vmatrix}-1&2\\2&-4\end{vmatrix}=4-4=0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

2) نحسب المحددات المستخرجة: لدينا: $\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$ غير مستقيميتين

**تمرين2:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط

$A(1;2;1)$ و $B(2;1;3)$ و $C(-1;4;-3)$ و $D(2;3;3)$

1. أدرس استقامية النقط $A$ و $B$ و $C$
2. أدرس استقامية النقط $A$ و $B$ و $D$

**الأجوبة :** 1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1)$ يعني $\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة: لدينا:

$\begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}=2-2=0$ و $\begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}=-4+4=0$ و $\begin{vmatrix}-1&2\\2&-4\end{vmatrix}=4-4=0$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين وبالتالي النقط : $A$ و $B$ و $C$ مستقيمية

2) $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$ ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستقيميتين

وبالتالي النقط : $A$ و $B$ و $D$ غير مستقيمية

### 2. متجهات مستوائية:

**تعريف:** لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ و $\vec{w}(x'';y'';z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء .

العدد الحقيقي: $x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$

يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ونرمز له

بأحد الرمزين : $\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

ومنه لدينا :

$$\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y'&y''\\z'&z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x'&x''\\z'&z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}$$

**مثال:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات

$\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(0;-4;4)$ و $\vec{w}(-2;0;4)$

أحسب محددة المتجهات : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&-2\\4&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&-2\\-4&0\end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\times-16-1\times8+1\times(-8)=16-16=0$$

**خاصية:** لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$

ملاحظة : في المثال السابق المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

**نتيجة:** المتجهات: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq0$

**تمرين3:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات

$\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(-2;1;1)$ و $\vec{w}(0;1;2)$ و $\vec{x}(0;3;3)$

و $\vec{y}(1;m;2)$ حيث $m$ بارا متر حقيقي.

1. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية
2. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية
3. حدد العدد $m$ بحيث تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية

**أجوبة :** 1) $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&3\\1&1&3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=3-3+6-6=0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية

2) $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&1\end{vmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=1+4-2=3\neq0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية

3) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية يعني

يعني $\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&m\\1&1&2\end{vmatrix}=0$ يعني $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{y}\right)=0$

يعني $1\begin{vmatrix}1&m\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&1\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&1\\1&m\end{vmatrix}=0$ يعني $6-3m=0$ يعني $m=2$

**تمرين4:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط :

$A(1;1;-2)$ و $B(0;2;-1)$ و $C(1;-3;2)$ و $D(-1;1;2)$ و $E(1;1;3)$

1. بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ مستوائية
2. بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $E$ مستوائية؟

**أجوبة :** 1) $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-4;4)$ و $\overrightarrow{AD}(-2;0;4)$ و

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&-2\\4&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&-2\\-4&0\end{vmatrix}=0$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مستوائية و بالتالي النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ مستوائية

2) $\overrightarrow{AE}(0;0;5)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&-4&0\\1&4&5\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&0\\4&5\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\-4&0\end{vmatrix}=20\neq 0$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مستوائية و بالتالي النقط $A$ و $B$ و $C$ و $E$ غير مستوائية

## III. تمثيل بارامتري لمستقيم في الفضاء:

**تعريف:** لتكن $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة من الفضاء.

النظمة: $\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارا متريا للمستقيم $D\left(A;\vec{u}\right)$ المار من $A$ و $\vec{u}$ متجهة موجهة له.

**تمرين5:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط :

$A(1;3;1)$ و $B(2;1;2)$ و $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ المتجهة $\vec{u}(-1;4;1)$

1) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم $(D)$ المار من $A$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$

2) هل النقط $B(2;1;2)$ $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ تنتمي للمستقيم $(D)$؟

3) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم $(BC)$

4) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين $(D)$ و $(BC)$

**أجوبة :** 1) $(D)\begin{cases}x=1-t\\y=3+4t\\z=1+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

2) $\begin{cases}2=1-t\\1=3+4t\\2=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-\frac{1}{2}\\t=-1\end{cases}$ ومنه $B\notin(D)$

$\begin{cases}3=1-t\\-3=3+4t\\1=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-\frac{3}{2}\\t=0\end{cases}$ ومنه $C\notin(D)$ و $\begin{cases}2=1-t\\-1=3+4t\\0=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$ ومنه $D\in(D)$

3) المستقيم $(BC)$ يمر من النقطة $B(2;1;2)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ متجهة موجهة له اذن $(t\in\mathbb{R})$ $(BC)\begin{cases}x=2+1t\\y=1-4t\\z=2-t\end{cases}$

4) $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ و $\vec{u}(-1;4;1)$

نلاحظ أن : $\overrightarrow{BC}=-\vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين وبالتالي المستقيمين $(D)$ و $(BC)$ متوازيين

**تمرين6:** ليكن $(D)$ و $(\Delta)$ مستقيمين من الفضاء معرفان على التوالي بتمثيليهما البرامتريان : $(D)\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

$(\Delta)\begin{cases}x=3+k\\y=-1+2k\\z=3-k\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

بين أن المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$ غير متوازيين

**الجواب :** $\vec{u}(1;-1;1)$ متجهة موجهة ل $(D)$

و $\vec{v}(1;2;-1)$ متجهة موجهة ل $(\Delta)$

نلاحظ أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين

وبالتالي المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$ غير متوازيين

## IV. تمثيل بارامتري لمستوى في الفضاء – معادلة ديكارتية لمستوى

### 1. تمثيل بارامتري لمستوى في الفضاء

**تعريف:** لتكن $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين غير مستقيمتين.

النظمة التالية : $(P):\begin{cases}x=x_A+at+a't'\\y=y_A+bt+b't'\\z=z_A+ct+c't'\end{cases}$

حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ المار من $A$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

مثال : حدد تمثيلا بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث: $A(1;-3;1)$ و $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

**الجواب :** $(P):\begin{cases}x=1-2t-t'\\y=-3+4t\\z=1+t+2t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

### 2. معادلة ديكارتية لمستوى

مثال: حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$ المار من $A(1;-3;1)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

**الجواب :** نلاحظ أن $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1\\ y+3 & 4 & 0\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}4&0\\1&2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-2&-1\\1&2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-2&-1\\4&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0$ يعني : $8x-8+3y+9+4z-4=0$

يعني : $(P)\ :8x+3y+4z-3=0$

**تعريف :** لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين.

معادلة ديكارتيه للمستوى $(P)$ المار من $A$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$ حيث $a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعداد حقيقية بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.

**خاصية:** مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة : $ax+by+cz+d=0$ بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي مستوى

**تمرين7:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقط $A(1;2;3)$ و $B(1;1;2)$ و $C(-1;2;-1)$

1) بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ غير مستقيمية

2) أعط تمثيلا بارامتريا للمستوى $(ABC)$

3) أعط معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$

**أجوبة :** 1) $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا: $d_1=\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-4\end{vmatrix}=4\neq0$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين وبالتالي النقط : $A$ و $B$ و $C$ غير مستقيمية

2) لدينا المستوى $(ABC)$ يمر من النقطة $A$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له اذن : $(P):\begin{cases}x=1+0t-2t'\\y=2-1t+0t'\\z=3-1t-4t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$

هو تمثيل بارامتري للمستوى $(ABC)$

3) $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&0&-2\\y-2&-1&0\\z-3&-1&-4\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}0&-2\\-1&-4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}0&-2\\-1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $4(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0$ يعني : $4x-4+2y-4-2z+6=0$

يعني : $4x+2y-2z-2=0$ يعني : $(P)\ :2x+y-z-1=0$

### 3. الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

**خاصية:** ليكن $(Q)=P(B;\vec{u'};\vec{v'})$ و $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ مستويين من الفضاء لدينا :

1. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})=0$ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})=0$

فان : $(P)$ و $(Q)$ منطبقان أو متوازيان قطعا.

2. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})\neq0$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})\neq0$

فان : $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم.

**ملحوظة:** ليكن $(P)$ و $(P')$ مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P):ax+by+cz+d=0$ مع $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

و $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

1. يكون المستويان $(P)$ و $(P')$ متقاطعين إذا وفقط إذا كان : $ab'-ba'\neq0$ أو $ac'-ca'\neq0$ أو $bc'-cb'\neq0$ .
2. يكون المستويان $(P)$ و $(P')$ متوازيين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم $k$ بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$.
3. يكون المستويان $(P)$ و $(P')$ منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم $k$ بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'=kd$

**مثال :** $(Q)\ :\ x-y-2z-3=0$ و $(P)\ :3x-3y-6z-2=0$

**الجواب:** المستويان $(P)$ و $(P')$ متوازيين قطعا $k=3$

**تمرين8:** نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقطة $A(1;1;0)$ و المتجهتين $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$

و المستوى $(Q)$ الذي معادلة الديكارتية : $x+y-z+1=0$ $(Q)$

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$ المار من $A$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس الوضع النسبي للمستويين $(Q)$ و $(P)$.

**الجواب :** 1)نلاحظ أن $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(A;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&1\\y-1&1&-1\\z&1&2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0$

يعني : $3(x-1)-(y-1)-2z=0$ يعني : $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

2) $(Q)\ :\ x+y-z+1=0$ و $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

$3\times1-1\times(-1)=4\neq0$ اذن $(P)$ و $(Q)$ متقاطعين

## V.معادلتان ديكارتيتان لمستقيم

**تعريف وخاصية:** ليكن $D(A;\vec{u})$ المستقيم المار من $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له.

- إذا كانت: $a\neq0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$ فان النظمة: $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$
تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $D$
- إذا كان أحد الأعداد $a$ أو $b$ أو $c$ منعدما (مثلا $a=0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $D$
- إذا كان عددان من الأعداد $a$ أو $b$ أو $c$ منعدمان (مثلا $a=0$ و $b=0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $y=y_A$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $D$ .

مثال1 : حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D(A;\vec{u})$ .

حيث : $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(1;2;3)$ متجهة موجهة له.

**الجواب :** $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ يعني $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}\\ \frac{x-1}{1}=\frac{z-2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)=y+1\\3(x-1)=z-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-3=0\\3x-z-1=0\end{cases}$$

مثال2 : حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D(A;\vec{u})$ .

حيث : $A(1;-1;3)$ و $\vec{u}(0;1;2)$ متجهة موجهة له.

**الجواب :** $\begin{cases}x=1\\ \frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\2(y+1)=z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\2y-z+5=0\end{cases}$

## VI. الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء- دراسة تحليلية:

**مثال1:** $(P):3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى $(P)$ و المستقيم $(D)$

**الجواب :** $(P):x+y-z+1=0$

اذن : $(1+t)+(2-t)-(3+2t)t+1=0$ يعني $t=\frac{1}{2}$ اذن : $(D)$ يقطع

المستوى $(P)$ في النقطة : $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\y=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\z=3+2\frac{1}{2}=4\end{cases}$

$A\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};4\right)$ هي نقطة التقاطع

**مثال2:** $(P):3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-2+4t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى $(P)$ و المستقيم $(D)$

**الجواب :** $(P):5x+2y-3z-10=0$

اذن : $5(1+2t)+2(-1+t)-3(-2+4t)t-10=0$ يعني $-1=0$ غير ممكن

اذن : $(D)$ و $(P)$ متوازيان قطعا

**خاصية:** ليكن $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\in(P)$ فان $(D)\subset(P)$
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\notin(P)$ فان $(D)$ يوازي قطعا $(P)$
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$ فان $(D)$ يخترق $(P)$.

**مثال1** و $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$ حيث $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(0;1;0)$ و $\vec{w}(0;2;0)$ و $A(0;0;-1)$ و $B(1;0;0)$

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

2) أدرس الوضع النسبي للمستوى $(P)$ و المستقيم $(D)$

**الجواب :** 1) نلاحظ أن $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(0;1;0)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(B;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{BM}(x-1;y;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&0\\y&-1&1\\z&1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=0$

يعني : $-(x-1)-0+z=0$ يعني : $(P):-x+z+1=0$

**(2** $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}=0$

ولدينا $A\in(P)$ لأن:

$(P):-0-1+1=0$ ومنه $(D)\subset(P)$