# مذكرة رقم 10 في درس متجهات الفضاء

## الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| ـ الحساب المتجهي في الفضاء؛<br>ـ المتجهات المستقيمية؛ التعريف المتجهي لمستقيم؛ التعريف المتجهي لمستوى؛<br>ـ المتجهات المستوائية. | ـ التمكن من قواعد الحساب المتجهي في الفضاء؛<br>ـ التعرف والتعبير عن استقامية متجهتين؛<br>ـ التعرف والتعبير عن استوائية ثلاث متجهات؛<br>ـ تطبيق الاستقامية والاستوائية في حل مسائل هندسية. | ـ يقدم مفهوم المتجهة والحساب المتجهي بنفس الكيفية التي قدم بها في المستوى.<br>ـ يتم الاكتفاء بالتأويل الهندسي للاستقامية والاستوائية. |

### I. تساوي متجهتين

**عناصر متجهة:** $A$ و $B$ نقطتان من الفضاء , إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم $(AB)$ .
- منحى $\vec{u}$ هو المنحى من $A$ نحو $B$
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة $AB$ و نكتب : $\|\vec{u}\| = AB$

**ملحوظة:** لكل نقطة $A$ من الفضاء , المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم ؛
$\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة , ونكتب $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء , لكل نقطة $A$ من الفضاء , توجد نقطة وحيدة $M$ من الفضاء بحيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

**تعريف:** نقول إن متجهتين متساويتان , ادا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم.

**خاصية:** ليكن $ABCD$ رباعيا من الفضاء لدينا : $ABCD$ متوازي الأضلاع ادا وفقط ادا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ .

**مثال:** لتكن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ أربع نقط غير مستقيمية
بين أنه ادا كان : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ لكل $M$ من الفضاء
فان : $ABCD$ متوازي الأضلاع.
الجواب :يكفي أن نبين مثلا أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ؟؟؟؟
لدينا :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}$
يعني $\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ يعني $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

### II. مجموع متجهتين

**تعريف:** لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي المتجهة $\vec{w}$ بحيث : ادا وضعنا $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ فان : $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ و نكتب : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

**علاقة شال:** لكل $A$ و $B$ و $C$ نقط من الفضاء
لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

**مقابل متجهة:** لتكن $\vec{u}$ متجهة من الفضاء ,
مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$ و التي لها نفس اتجاه $\vec{u}$ ونفس منظم $\vec{u}$ و لكن منحاها هو عكس منحى $\vec{u}$ ولدينا $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ لكل $A$ و $B$ من الفضاء .

لتكن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ أربع نقط من الفضاء
**مثال:** نضع : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MD}$ لكل $M$ من الفضاء
بين أن : المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة $M$

الجواب : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{AD}$ يعني $\vec{u}=-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AD}$ ومنه المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة $M$

### III. استقامية متجهتين و التعريف المتجهي لمستقيم ومستوى

#### 1. استقامية متجهتين :

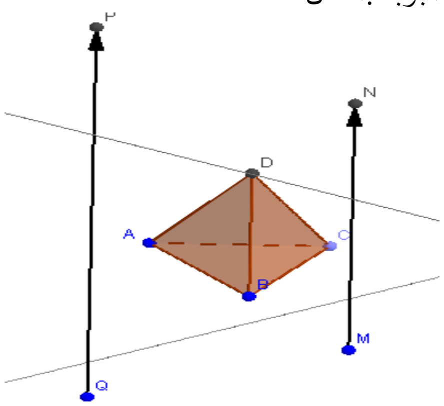
**تعريف:** لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء
نقول ان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان اذا وجد عدد حقيقي $k$ بحيث : $\vec{v}=k\vec{u}$

**خاصية ::** لتكن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ نقط من الفضاء بحيث $A\neq B$ و $C\neq D$
$$(AB)\parallel(CD)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$$

**تمرين:** ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه
نعتبر النقط $M$ و $N$ و $P$ و $Q$ أربع نقط بحيث : $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CD}$

1. أنشئ الشكل .
2. أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\overrightarrow{BD}$
3. استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .
4. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين $(MN)$ و $(PQ)$؟

أجوبة: الشكل:




2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}=-3\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)$

$$\overrightarrow{PQ}=-3\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=-3\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=-3\overrightarrow{BD}$$

3) وجدنا $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

ووجدنا $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

من ❶ و ❷ نستنتج أن : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ أي $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .

4) وجدنا $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ اذن المستقيمان $(MN)$ و $(PQ)$ متوازيان

### 2.التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

لتكن نقطة $A$ من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

المستقيم $(D)$ الذي يمر من $A$ و $\vec{u}$ متجهة موجهة له نرمز له بالرمز $D\left(A;\vec{u}\right)$ ولدينا :

$$M\in D \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$M\in\left(AB\right)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$$

### 3.التعريف المتجهي لمستوى في الفضاء :

$A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقط من الفضاء غير مستقيمية

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير مستقيميتين و $A$ و $B$ و $C$ تكون لنا مستوى $(P)=ABC$

نقول $(P)=ABC$ مستوى يمر من النقطة $A$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له

ونكتب : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)=ABC$

$$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \text{ مستوائية } \overrightarrow{AM} \text{ و } \vec{v} \text{ و } \vec{u}$$

$$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R};\exists y\in\mathbb{R}\,\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$$

$$M\in ABC\Leftrightarrow \text{ مستوائية } \overrightarrow{AM} \text{ و } \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB}$$

<u>**تمرين**</u>

ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه و $M$ نقطة من الفضاء بحيث :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

1. أكتب المتجهة $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
2. استنتج أن النقطة $M$ تنتمي إلى المستوى $(ABC)$
3. استنتج أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية .

أجوبة :(1

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$$

2) وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$ ومنه النقطة $M$ تنتمي إلى المستوى $(ABC)$

3) وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$ ومنه المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية