السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	مبادئ في المنطق حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هي قياسات زوايا مثلث.

نفترض أن : $\hat{A} \leq 60°$ أو $\hat{B} \leq 60°$ أو $\hat{C} \leq 60°$

إذن : $\hat{A} > 60°$ أو $\hat{B} > 60°$ أو $\hat{C} > 60°$ إذن : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180°$ وهذا غير ممكن لأننا نعلم أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي $180°$

تمرين 2 :

1) لنبين أن $\forall x \in]0;+\infty[\quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\quad x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

2) ليكن a و b عددين حقيقين موجبين قطعا

نفترض أن كلا العددين $a + \frac{1}{b}$ و $b + \frac{1}{a}$ أصغر من 2.

إذن : $a + \frac{1}{b} < 2$ و $b + \frac{1}{a} < 2$ إذن : $a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{a} < 4$ منه : $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) < 4$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن : $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $b + \frac{1}{b} \geq 2$ منه : $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

إذن : $4 \leq \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) < 4$ و هذا غير ممكن، إذا أحد العددين $a + \frac{1}{b}$ أو $b + \frac{1}{a}$ أكبر من أو يساوي 2

تمرين 3 : ليكن x و y عددين حقيقيين غير منعدمين ، لنبين أن : $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \Rightarrow (x = y \text{ أو } xy = 1)$

لدينا :

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \Rightarrow x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow (x-y) + \frac{y-x}{xy} = 0 \Rightarrow (x-y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - y = 0 \;\; ou \;\; 1 - \frac{1}{xy} = 0\right) \Rightarrow \left(x = y \; ou \; 1 = \frac{1}{xy}\right)$$

$$\Rightarrow (x = y \; ou \;\; xy = 1)$$

تمرين 4 :

1) لنبين أن : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad x + y < 2 \Rightarrow (x \geq 1 \text{ أو } y \geq 1)$

لدينا : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad (x < 1 \;\; et \;\; y < 1) \Rightarrow x + y < 2$ إذن: $\forall (x,y) \in IR^2 \quad x + y < 2 \Rightarrow (x \geq 1 \text{ أو } y \geq 1)$

2) لنبين أن : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad (x \neq 1 \text{ و } y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$

لدينا:

$$\forall (x,y) \in IR^2 \quad xy + 1 = x + y \Rightarrow xy - x + 1 - y = 0 \Rightarrow x(y-1) - (y-1) = 0 \Rightarrow (y-1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 1 = 0 \;\; ou \;\; x - 1 = 0) \Rightarrow x = 1 \; ou \;\; y = 1$$

بالتالي : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad (x \neq 1 \text{ و } y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$

الاستلزام المضاد للعكس هو عبارة مكافئة للعبارة المراد البرهان على صحتها و ليس نفيا لها عكس ما قد يوحي به اسم هذا النوع من البرهان.

تمرين 5 : مستعملا برهانا بفصل الحالات بين أن :

1) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، $n+n^{2015}$ عدد زوجي

- إذا كان n زوجيا فإن n^{2015} عدد زوجي، إذن $n+n^{2015}$ عدد زوجي
- إذا كان n فرديا فإن n^{2015} عدد فردي، إذن $n+n^{2015}$ عدد زوجي

في جميع الحالات نجد أن $n+n^{2015}$ عدد زوجي

2) لنبين أن $x^4-x+1\geq 0 \quad \forall x\in IR$

- إذا كان $x\geq 1$ فإن $x^3\geq 1$ منه $x^3-1\geq 0$ منه : $x(x^3-1)\geq 0$ منه: $x^4-x+1=x(x^3-1)+1\geq 1>0$
- إذا كان $x<1$ فإن $1-x>0$ منه: $x^4-x+1=x^4+(1-x)\geq 0$

في جميع الحالات نجد أن $x^4-x+1\geq 0$

3) لنبين أن $|x-1|+|x+1|\geq 2 \quad \forall x\in IR$

- إذا كان $x\leq -1$ فإن : $x-1\leq -2<0$ و $x+1\leq 0$

منه: $|x-1|+|x+1|=-x+1-x-1=-2x$ ، و بما أن $x\leq -1$ فإن : $-2x\geq 2$ منه : $|x-1|+|x+1|\geq 2$

- إذا كان $-1<x\leq 1$ فإن : $x-1\leq 0$ و $x+1>0$

منه: $|x-1|+|x+1|=-x+1+x+1=2\geq 2$

- إذا كان $x>1$ فإن : $x-1>0$ و $x+1>0$

منه: $|x-1|+|x+1|=x-1+x+1=2x>2$

في جميع الحالات نجد أن $|x-1|+|x+1|\geq 2$

تمرين 6 :

1) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، 4^n-1 مضاعف للعدد 3

- بالنسبة لـ $n=0$: $4^n-1=4^0-1=1-1=0$ و 0 مضاعف للعدد 3
- نفترض أن 4^n-1 مضاعف للعدد 3 ونبين أن $4^{n+1}-1$ مضاعف للعدد 3

بما أن 4^n-1 مضاعف للعدد 3 فإن $4^n-1=3k$ حيث $k\in IN$

منه: $4^n=3k+1$ منه : $4^{n+1}-1=4\times 4^n-1=4(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$

إذن : $4^{n+1}-1$ مضاعف للعدد 3

2) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، 17 يقسم 21^n-4^n

- بالنسبة لـ $n=0$ $21^n-4^n=1-1=0$ و 17 قاسم لـ 0
- نفترض أن 17 يقسم 21^n-4^n ونبين أن 17 يقسم $21^{n+1}-4^{n+1}$

بما أن 17 يقسم 21^n-4^n فإن $21^n-4^n=17k$ حيث $k\in IN$

منه: $21^n=4^n+17k$ منه :

$$21^{n+1}-4^{n+1}=21\times 21^n-4\times 4^n=21(4^n+17k)-4\times 4^n=21\times 4^n+21\times 17k-4\times 4^n$$

$$=(21-4)\times 4^n+21\times 17k=17\times 4^n+21\times 17k=17(4^n+21k)$$

إذن : 17 يقسم $21^{n+1}-4^{n+1}$

3) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، 6 يقسم n^3-n

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن 0 مضاعف لـ 6
- نفترض أن $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6 ، و لنبين أن $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

لدينا $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6، إذن: $n(n+1)(n+2)=6a$ حيث $a\in IN$

و منه : $(n+1)(n+2)(n+3)=(n+3)(n+1)(n+2)=n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)=6a+3(n+1)(n+2)$

و بما أن جذاء عددين متتابعين هو عدد زوجي فإن: $(n+1)(n+2)=2b$ حيث $b\in IN$

منه: $(n+1)(n+2)(n+3)=6a+6b=6(a+b)$ و حيث أن: $(a+b)\in IN$

فإن : $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

4) لنبين أن : $2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-2 \quad \forall n\in IN^*$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة لأن $2=2^{1+1}-2$
- نفترض أن $2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-2$ ، و لنبين أن $2+2^2+2^3+...+2^{n+1}=2^{n+2}-2$

لدينا $2+2^2+2^3+...+2^{n+1}=2+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-2+2^{n+1}=2\times 2^{n+1}-2=2^{n+2}-2$

5) $\forall n\in IN \quad 3^n>n$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن $3^0=1>0$
- نفترض أن $3^n>n$ ، و لنبين أن $3^{n+1}>n+1$

لدينا :

$$3^n>n \Rightarrow 3^n-n\in IN^* \Rightarrow 3^n-n\geq 1 \Rightarrow 3^n\geq n+1$$
$$\Rightarrow 3\times 3^n\geq 3n+3 \Rightarrow 3^{n+1}\geq n+1+(2n+2)>n+1$$

6) $\forall n\in IN \quad 1^2+2^2+.....+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة لأن $1^2=1=\dfrac{1\times 2\times 3}{6}$
- نفترض أن $1+4+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، و لنبين أن

$$1+4+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

لدينا

$$1+4+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6(n+1))$$
$$=\frac{n+1}{6}(2n^2+n+6n+6)=\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(n+1)(2n(n+2)+3(n+2))}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$