

العمليات على العبارات

- ❖ نفي العبارة P هو العبارة التي نرمز لها بالرمز \bar{P} (أو $\neg P$) والتي تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة
- ❖ عطف عبارتين هو العبارة (P و Q) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتين معا
- ❖ فصل عبارتين هو العبارة (P أو Q) والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان P و Q خاطئتين معا
- ❖ استلزام عبارتين هو العبارة ($P \Rightarrow Q$) والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة
- ❖ تكافئ عبارتين هو العبارة ($P \Leftrightarrow Q$) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتين معا أو خاطئتين معا

نفي عبارة مكتملة

- نفي العبارة $(\forall x \in E); P(x)$ هي العبارة $(\exists x \in E); \bar{P}(x)$
- نفي العبارة $(\exists x \in E); P(x)$ هي العبارة $(\forall x \in E); \bar{P}(x)$
- نفي العبارة $(\exists x \in E)(\forall y \in F); P(x, y)$ هي العبارة $(\forall x \in E)(\exists y \in F); \bar{P}(x, y)$

أنواع الاستدلال

- ❖ الاستدلال بالتكافؤات المتتالية
- ❖ الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس
- إذا كان $(P \Leftrightarrow Q)$ و $(Q \Leftrightarrow R)$ فإن $(P \Leftrightarrow R)$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$
- ❖ الاستدلال بفصل الحالات
- ❖ الاستدلال بالخلف
- $[(P \Rightarrow R) \text{ أو } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \text{ أو } Q) \Rightarrow R]$
- $[\bar{P} \Rightarrow (Q \text{ و } \bar{Q})] \Rightarrow P$
- ❖ الاستدلال بالترجع

خاصية : لتكن $P(n)$ خاصية مرتبطة بعدد صحيح طبيعي n

إذا كانت الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد صحيح طبيعي معلوم n_0

والعبارة $(P(n) \Rightarrow p(n+1))$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq n_0$

فإن الخاصية $P(n)$ تكون صحيحة لكل n من \mathbb{N} بحيث $n \geq n_0$

التمرين رقم 1 :

- 1) أكتب كلا من العبارتين التاليتين باستعمال الرموز المنطقية وأذكر إذا كانت صحيحة أم خاطئة.
- (a) (P_1) " لا يوجد أي عدد جذري حل للمعادلة $x^2-2=0$ "
- (b) (P_2) " لكل عددين جذريين x و y يوجد عدد جذري z بحيث: $y < z$ أو $x < z$ "
- 2) أكتب العبارات التالية باستعمال الرموز المنطقية ثم حدد نفي كل واحدة منها:
- (P_1) " مربع أي عدد حقيقي هو أكبر من أو يساوي -1 "
- (P_2) " للحدودية x^2-2x-3 على الأقل جذر حقيقي "
- (P_3) " يوجد عدد حقيقي أصغر قطعاً من كل الأعداد الحقيقية "
- (P_4) " إذا كان عدد حقيقي أصغر من أو يساوي -1 ، فإن هذا العدد سالب قطعاً.

التمرين رقم 2 :

أكتب نفي العبارات التالية و أدرس حقيقتها:

$$(P_2) \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x^2} - |x| \geq 0$$

$$(P_1) \forall x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{1}{x} < x$$

$$(P_4) \exists x \in \mathbb{R}^+ / (x^2 \leq x \text{ أو } 1 + \frac{1}{x} < 0)$$

$$(P_3) \forall x \in [1; +\infty[: (x^2 \geq 1 \text{ و } x^2 + 2x - 3 \geq 0)$$

$$(P_6) (\forall x \in \mathbb{R}). (\exists y \in \mathbb{R}) : (x^2 + y^2 + xy - 3 = 0)$$

$$(P_5) \forall x \in \mathbb{Q} : (x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z})$$

$$(P_8) (\forall x \in]0, 1[) : \left(\frac{2x}{x^2(1+x^2)} < 1 \right)$$

$$(P_7) (\exists n \in \mathbb{N}^*) / (\forall x \in \mathbb{R}) : \left(\frac{x^{2n}}{1+x} > 1 \right)$$

التمرين رقم 4 : الاستدلال الإستنتاجي

$$(1) \text{ بين أن : } x + \frac{1}{x} \geq 2 : (\forall x \in \mathbb{R}^{**})$$

$$(2) \text{ بين أن : } |x+y| < |1+xy| : (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : (|x| < 1 \text{ و } |y| < 1)$$

$$(3) \text{ بين أن : } (ax + by = 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2 \right) : (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}). (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{*2})$$

$$(4) (\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) : \left. \begin{array}{l} |x-y| \leq z \\ |x+y| \leq z \end{array} \right\} \Rightarrow |xy| \leq \frac{z^2}{2}$$

$$(5) (\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \left. \begin{array}{l} |x| < z \\ |y| < z \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \frac{x+y}{2} \right| + \left| \frac{x-y}{2} \right| < \frac{z^2}{2}$$

التمرين رقم 5 :

بين أن لكل m و n من \mathbb{N} :

$$(14n + 14 \text{ مجموع 3 مربعات كاملة}) \Rightarrow (n + 1 \text{ مربع كامل})$$

$$(n + 1 \text{ مجموع 3 مربعات كاملة}) \Rightarrow (3n + 1 \text{ مربع كامل})$$

$$(mn + 1 \text{ مربع كامل}) \Rightarrow (n \text{ و } m \text{ متتابعين في } \mathbb{N})$$

التمرين رقم 6 : الاستدلال بالإستلزام المضاد للعكس

$$(1) \text{ بين أن : } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : (x \neq 1 \text{ و } y \neq 1) \Rightarrow (x + y - xy \neq 1)$$

$$(2) \text{ بين أنه لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا : } (xy \neq 1 \text{ و } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$$

$$(3) \text{ بين أن : } (\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) : (x + y > 2z) \Rightarrow (x > z \text{ أو } y > z)$$

التمرين رقم 7 : الاستدلال بالتكافؤات المتتالية

$$(1) \text{ بين أن : } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : \left. \begin{array}{l} -1 < x < +1 \\ -1 < y < +1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow |x + y| < |1 + xy|$$

$$(2) \text{ بين أن : } (\forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}_{*+}^4) \left[x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{ax + by}{bx + ay} < \frac{y}{x} \right]$$

$$(3) \text{ لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R}^+ : y < x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} - \sqrt{x} < \sqrt{1+y} - \sqrt{y}$$

$$(4) \text{ لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R} : (\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+y^2} + y) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$$

$$(5) \text{ لكل } \theta \text{ من } \mathbb{R} : (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta = 1) \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin \theta = 0 \text{ و } \cos \theta = 1) \\ \text{أو} \\ \sin \theta = 1 \text{ و } \cos \theta = 0 \end{cases}$$

التمرين رقم 8 :

$$(1) \text{ بين أن } (a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ و } b = 0)$$

$$(2) \text{ حل في } (\mathbb{Q}^*)^2 \text{ المعادلة : } x^2 - 2y^2 = 0$$

$$(3) \text{ نفترض أن } (a, b) \neq (0, 0)$$

$$\text{بين أنه : } \exists (x, y) \in \mathbb{Q}^2 / (a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1$$

التمرين رقم 9 : الاستدلال بفصل الحالات

$$(1) \text{ بين أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N} \text{ و } \frac{n^2+1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$(2) \text{ بين أن لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R} . \text{ النظام التالية: } \begin{cases} y^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = x \end{cases} \text{ لا تقبل حلا في } \mathbb{R}^2$$

$$(3) \text{ حل في } \mathbb{R} : \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \text{ و } \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$$

$$(4) \text{ حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظام التالية: } \begin{cases} |x+y| - 2|x-y+1| = -6 \\ x-2y = 6 \end{cases}$$

التمرين رقم 10 : الإستدلال بالخلف

$$(1) \text{ بين أن } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ و إستنتج أن } \sqrt{3} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$(2) \text{ ليكن } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{Q}^+ \text{ بحيث } \sqrt{x} \notin \mathbb{Q} . \text{ بين أن: } \sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$$

$$(3) \text{ ليكن } a \in \mathbb{R}^+ \text{ بحيث } [a < \varepsilon : (\forall \varepsilon > 0)] : \text{ بين أن } a = 0$$

$$(4) \text{ بين أن: } \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q} : (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(5) \text{ ليكن } n \text{ و } p \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ بحيث } p > 1 . \text{ بين أنه إذا كان } p \text{ يقسم } n \text{ فإن } p \text{ لا يقسم } n+1$$

التمرين رقم 11 : الإستدلال بالترجع:

$$(1) \text{ بين أن : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ حيث } q \neq 1$$

$$(2) \text{ بين } (\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(3) \text{ بين أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : n^3 - n \text{ يقبل القسمة على } 3 .$$

$$(4) \text{ بين أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : 3^{2n} - 2^n \text{ يقبل القسمة على } 7 .$$

$$(5) \text{ بين أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* 3^{2n} + 2^{6n-5} \text{ يقبل القسمة على } 11$$

$$(6) \text{ بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) (1+q)^n \geq 1+nq \text{ حيث } q > 0$$

$$(7) \text{ بين أن: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n : \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$(8) \text{ بين أن : } 7^n > 5^n + 6^n : \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$$

$$(9) \text{ بين أن: } \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1) : (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$