

2. ماذا يمكن أن نقول عن المتتالية  $(u_n)$  ؟

**الأجوبة:** (أ) نبين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } 1 - u_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1) - (n+1)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \geq 0$$

ومنه:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$  ①

(أ) نبين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} > 0$$

ومنه:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n$  ②

وبالتالي من ① و ② نجد:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

(2) نقول المتتالية العددية  $(u_n)$  مكبورة بالعدد الحقيقي 1

و نقول المتتالية العددية  $(u_n)$  مصغورة بالعدد الحقيقي  $\frac{1}{2}$

و نقول ان المتتالية العددية  $(u_n)$  محدودة

**تمرين 5:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

(1) أحسب  $u_1$  (2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  مصغورة بالعدد 1

**الجواب:**

$$u_{0+1} = u_0^2 + 2u_0 + 2 = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

(1) يكفي أن نبين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } u_n - 1 = u_n^2 + 2u_n + 2 - 1 = u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2 \geq 0$$

ومنه  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n$  وبالتالي:  $(u_n)$  مصغورة بالعدد 1

**تمرين 6:** أدرس رتبة المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

**الجواب:**  $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n + 3) = 2 > 0$

اذن:  $(u_n)$  تزايدية قطعاً

**تمرين 7:** أدرس رتبة المتتالية  $(v_n)$  المعرفة

$$\text{كالتالي: } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2}{n}$$

**الجواب:**

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)} < 0$$

اذن:  $(v_n)$  تناقصية قطعاً

**تمرين 8:** أدرس رتبة المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\text{كالتالي: } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-n}{n+2}$$

**تمرين 1:** لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

$$(1) \dots\dots\dots, 10, 8, 6, 4, 2, 0$$

$$(2) \dots\dots\dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6$$

$$(3) \dots\dots\dots, 243, 81, 27, 9, 3, 1$$

$$(4) \dots\dots\dots, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$$

$$(5) \dots\dots\dots, 36, 25, 16, 9, 4, 1$$

**الأجوبة: (1)** 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0

$$(2) -24, 21, -18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6$$

$$(3) 19683, 6561, 2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1$$

$$(4) \frac{1}{512}, \frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$$

$$(5) 100, 81, 64, 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1$$

**تمرين 2:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

(1) أحسب حدها الأول  $u_0$

(2) أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$

$$\text{الأجوبة: (1)} \quad u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$(2) \quad u_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \text{ و } u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$\text{و } u_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$$

نلاحظ أن أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

**تمرين 3:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بالعلاقة الترجعية

$$\text{التالية: } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \quad (u_n)$$

**الجواب:** نعوض  $n$  ب 0

$$\text{ف نجد: } u_{0+1} = 2 \times u_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$\text{اذن: } u_1 = 5$$

نعوض  $n$  ب 1

$$\text{ف نجد: } u_2 = 13. \text{ اذن: } u_{1+1} = 2 \times u_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

نعوض  $n$  ب 2

$$\text{ف نجد: } u_{2+1} = 2 \times u_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 26 + 3 = 29$$

$$\text{اذن: } u_3 = 29$$

**ملاحظة:** هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعية

**تمرين 4:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\text{كالتالي: } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

1. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

## الجواب :

اذن :  $4 - u_n \geq 0$  و  $u_n + 2 > 0$  و منه  $4 - u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 4$

(2) المتتالية العددية  $(u_n)$  محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

$$(3) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n = \frac{8(u_n - 1) - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2}$$

نعمل  $-u_n^2 + 6u_n - 8$  نحسب المميز  $\Delta$

$$x_2 = \frac{-6 - 2}{-2} = 4 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-6 + 2}{-2} = 2 \quad \Delta = 36 - 32 = 4 > 0$$

ومنه التعميل :  $-u_n^2 + 6u_n - 8 = -(u_n - 2)(u_n - 4)$

$$\text{ومنه : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

لدينا :  $u_n \geq 2$  اذن :  $u_n \geq 0$  و  $u_n - 2 \geq 0$

ولدينا :  $u_n \leq 4$  اذن :  $u_n - 4 \leq 0$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} \geq 0$  وبالتالي  $(u_n)$  تزايدية

**تمرين 11:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \text{كالتالي :}$$

1. بين أن المتتالية  $(u_n)$  مصغورة بالعدد 1

2. بين أن المتتالية  $(u_n)$  مكبورة بالعدد 2

3. ماذا تستنتج ؟

4. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

**(الأجوبة: 1) @** يكفي ان نبين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n$  ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

@ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

لدينا  $u_0 = 1 \geq 1$  اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

ب) نفترض أن :  $u_n \geq 1$

@ نبين أن :  $u_{n+1} \geq 1$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1 = \frac{4u_n - 2 - (u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 1}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \geq 1$$

اذن :  $u_{n+1} - 1 \geq 0$  و  $u_n + 1 > 0$  و منه  $u_{n+1} - 1 \geq 0$

وبالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

(2) يكفي ان نبين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$  ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

@ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

لدينا  $u_0 = 1 \leq 2$  اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

@ نفترض أن :  $u_n \leq 2$

@ نبين أن :  $u_{n+1} \leq 2$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } 2 - u_{n+1} = 2 - \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2(u_n + 1) - (4u_n - 2)}{u_n + 1} = \frac{-2u_n + 4}{u_n + 1}$$

$$2 - u_{n+1} = \frac{2(2 - u_n)}{u_n + 1} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \leq 2$$

اذن :  $2 - u_{n+1} \geq 0$  و  $u_n + 1 > 0$  و منه  $2 - u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \left( \frac{-(n+1)}{n+1+2} \right) - \left( \frac{-n}{n+2} \right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2} = \frac{(-n-1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

اذن  $u_{n+1} \leq u_n$  وبالتالي  $(u_n)$  تناقصية قطعا

**تمرين 9:** أدرس رتبة المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq -\frac{3}{7} \quad \text{واستنتج أن : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{5n-3}{2n+7}$$

## الجواب :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7} - \frac{5n-3}{2n+7} = \frac{(5n+2)(2n+7) - (2n+9)(5n-3)}{(2n+9)(2n+7)}$$

$$\text{اذ } u_{n+1} - u_n = \frac{10n^2 + 35n + 4n + 14 - 10n^2 + 6n - 45n + 27}{(2n+9)(2n+7)} = \frac{41}{(2n+9)(2n+7)} \geq 0$$

اذن  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  وبالتالي  $(u_n)$

بما أن  $(u_n)$  تزايدية فان :  $u_n \geq u_0$  يعني  $u_n \geq -\frac{3}{7}$   $\forall n \in \mathbb{N}$

**تمرين 10:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{كالتالي :}$$

1. بين أن المتتالية  $(u_n)$  مصغورة بالعدد 2

2. بين أن المتتالية  $(u_n)$  مكبورة بالعدد 4

3. ماذا تستنتج ؟

4. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

**(الأجوبة: 1) @** يكفي ان نبين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n$  ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

@ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

لدينا  $u_0 = 3 \geq 2$  اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

ب) نفترض أن :  $u_n \geq 2$

@ نبين أن :  $u_{n+1} \geq 2$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } u_{n+1} - 2 = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 = \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{6u_n - 12}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \geq 2$$

اذن :  $u_{n+1} - 2 \geq 0$  و  $u_n + 2 > 0$  و منه  $u_{n+1} - 2 \geq 0$

وبالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$

(2) يكفي ان نبين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 4$  ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

@ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

لدينا  $u_0 = 3 \leq 4$  اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

@ نفترض أن :  $u_n \leq 4$

@ نبين أن :  $u_{n+1} \leq 4$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } 4 - u_{n+1} = 4 - \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{4(u_n + 2) - 8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{-4u_n + 16}{u_n + 2}$$

$$4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \leq 4$$

(3) المتتالية العددية  $(u_n)$  محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 2} \quad (4)$$

نعمل  $-u_n^2 + 3u_n - 2$  نحسب المميز  $\Delta$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \quad \text{هناك جذرين : } x_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1 \quad \text{و } x_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2$$

ومنه التعميل :  $-u_n^2 + 3u_n - 2 = -(u_n - 1)(u_n - 2)$

$$\text{ومنه : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1}$$

لدينا :  $u_n \geq 1$  اذن :  $u_n \geq 0$  و  $u_n - 1 \geq 0$

ولدينا :  $u_n \leq 2$  اذن :  $u_n - 2 \leq 0$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1} \geq 0$  وبالتالي  $(u_n)$  تزايدية

**تمرين 12:** تعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+3}{4}$$

بين أن المتتالية  $(u_n)$  حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

$$\text{الجواب : } r = \frac{(n+1)+3}{4} - \frac{n+3}{4} = \frac{1}{4}$$

ومنه المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هي حسابية أساسها  $\frac{1}{4} = r$

وحدها الأول :  $u_0 = \frac{3}{4}$

**تمرين 13:** لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  و  $u_6 = 31$

(1) أحسب  $u_0$  (2) أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  (3) أحسب :  $u_{2015}$  ثم  $u_{2016}$

**أجوبة (1):** لدينا  $(u_n)$  حسابية اذن :  $u_n = u_0 + nr$

ومنه :  $u_6 = u_0 + 6 \times \frac{1}{2} = 31$  يعني  $u_0 = 28$

$$(2) \text{ يعني } u_n = u_0 + nr = 28 + \frac{n}{2}$$

$$(3) \quad u_{2015} = 28 + \frac{2015}{2} = \frac{2071}{2}$$

$$\text{و } u_{2016} = 28 + \frac{2016}{2} = 28 + 1008 = 1036$$

**تمرين 14:** لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  و بحيث  $u_0 = 5$

$$\text{و } u_{100} = -45$$

(1) حدد  $r$  (2) أحسب :  $u_{2015}$  و  $u_{2016}$

**أجوبة (1):** لدينا  $(u_n)$  حسابية اذن :  $u_n = u_0 + nr$

ومنه :  $-45 = 5 + 100r$  يعني  $u_{100} = u_0 + 100r = -45$

$$\text{يعني } -50 = 100r \text{ يعني } r = -\frac{1}{2}$$

(2)  $(u_n)$  حسابية اذن :  $u_n = u_0 + nr$  يعني  $u_{2015} = 5 + 2015 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\text{يعني } u_{2015} = 5 - \frac{2015}{2} = \frac{-2005}{2}$$

$$\text{ومنه } u_{2016} = \frac{-2005}{2} + \frac{-1}{2} = \frac{-2006}{2} = -1003$$

**تمرين 15:** تعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n + 1}$$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  و استنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

3. بين بالترجع أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$

4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

5. استنتج طريقة أخرى لكتابة  $u_n$  بدلالة  $n$

$$\text{أجوبة : } u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n}$$

(1) نعوض بـ 0

$$u_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{اذن } u_{0+1} = \frac{-1}{2+u_0} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

نعوض بـ 1 فنجد :

$$u_2 = -\frac{4}{7} \quad \text{اذن } u_{1+1} = \frac{-1}{2+u_1} = \frac{-1}{2-\frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{7}{4}} = \frac{-4}{7}$$

نعوض بـ 0 في  $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$  فنجد :  $v_0 = \frac{1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

نعوض بـ 1 فنجد :  $v_1 = \frac{1}{u_1 + 1} = \frac{1}{-\frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{4}$

$$(2) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 1} - \frac{1}{u_n + 1}$$

$$\text{نعوض } u_{n+1} \text{ بـ } \frac{-1}{2+u_n}$$

$$\text{فنجد : } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{-1}{2+u_n} + 1} - \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{\frac{u_n + 1}{2+u_n}} - \frac{1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} - \frac{1}{u_n + 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2 - 1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 1} = 1$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 1$  وحدها الأول :  $v_0 = \frac{1}{3}$

$$(3) \quad \text{لدينا : } u_0 = 2 \quad \text{و } \frac{-3 \times 0 + 2}{2 \times 0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

اذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ  $n = 0$

$$\text{ب) نفترض أن : } u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$$

ج) نبين أن :  $u_{n+1} = \frac{-3(n+1)+2}{3(n+1)+1}$  أي نبين أن :  $u_{n+1} = -\frac{3n+1}{3n+4}$  ؟؟؟

لدينا :  $u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n}$  وحسب افتراض التراجع

$$\text{لدينا : } u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{13} = (13 - 0 + 1) \frac{u_0 + u_{13}}{2} \quad (2)$$

$$u_{13} = 3 \times 13 + 5 = 44 \quad \text{ومنه نحسب: } S = 14 \frac{u_0 + u_{13}}{2} = \frac{14}{2} (5 + u_{13})$$

$$S = 7(5 + 44) = 7 \times 49 = 343 \quad \text{وبالتالي:}$$

### تمرين 18:

1. لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي:  $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

2. لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -2$  وحدها الأول  $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي:  $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25}$

**أجوبة (1)**  $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = (30 - 3 + 1) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$

$$S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$$

وبما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $u_0 = 1$

$$\text{فان: } u_n = u_0 + (n-0)r$$

$$\text{أي: } u_n = 1 + \frac{n}{2} \quad \text{أي: } u_n = 1 + (n-0) \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه نحسب: } u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{و: } u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$\text{وبالتالي: } S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2} = 14 \left( \frac{5}{2} + 16 \right) = 14 \left( \frac{37}{2} \right) = 7 \times 37 = 259$$

$$S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25} = (25 - 7 + 1) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2} \quad (2)$$

وبما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -2$  وحدها الأول

$$u_0 = 4 \quad \text{فان: } u_n = u_0 + (n-0)r$$

$$\text{أي: } u_n = 4 - 2n \quad \text{أي: } u_n = 4 + (n-0)(-2)$$

$$\text{نحسب: } u_7 = 4 - 2 \times 7 = 4 - 14 = -10$$

$$\text{و } u_{25} = 4 - 2 \times 25 = 4 - 50 = -46$$

$$\text{وبالتالي: } S_2 = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{-10 - 46}{2} = (19) \frac{-56}{2} = 19 \times -28 = -532$$

**تمرين 19:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة الصريحة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$

2. أحسب  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$  وماذا تستنتج؟

**أجوبة (1)**  $u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$  و  $u_1 = 2 \times 3^1 = 6$  و  $u_2 = 2 \times 3^2 = 18$  و

$$u_3 = 2 \times 3^3 = 54$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n} = 3^1 = 3 = q \quad (2)$$

أستنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية

أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $u_0 = 2$

**تمرين 20:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$

$$\text{بحيث: } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 \times 3^{2n+1}$$

بين أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية و حدد أساسها  $q$  وحدها الأول

$$\text{اذن: } u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n} = \frac{-1}{2 + \frac{-1}{2 + \frac{-1}{3n+1}}} = \frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}}$$

$$\text{ومنه: } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$$

(4) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 1$  وحدها الأول:  $v_0 = \frac{1}{3}$

$$\text{فان: } v_n = v_0 + nr \quad \text{أي: } v_n = \frac{1}{3} + n$$

$$(5) \text{نعلم أن: } v_n = \frac{1}{u_n+1} \text{ يعني } u_n+1 = \frac{1}{v_n} \text{ يعني } u_n = \frac{1}{v_n} - 1$$

$$\text{ونعلم أن: } v_n = \frac{1}{3} + n \quad \text{اذن:}$$

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{3} + n} - 1 = \frac{1}{\frac{3n+1}{3}} - 1 = \frac{3}{3n+1} - 1 = \frac{3-3n-1}{3n+1} = \frac{-3n-2}{3n+1}$$

**تمرين 16:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3 + u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{1}{1+u_n}$

1. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

2. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة (1)**  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1}$  نعوض  $u_{n+1}$  ب  $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

$$\text{فجد: } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+3}{2u_n+2} - \frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3-2}{2u_n+2} = \frac{u_n+1}{2u_n+2} = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)} = \frac{1}{2} = r$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

(2) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

$$\text{فان: } v_n = v_0 + nr \quad \text{أي: } v_n = 1 + \frac{n}{2}$$

$$\text{نعلم أن: } v_n = \frac{1}{u_n+1} \text{ يعني } u_n+1 = \frac{1}{v_n} \text{ يعني } u_n = \frac{1}{v_n} - 1$$

$$\text{ونعلم أن: } v_n = 1 + \frac{n}{2} \quad \text{اذن:}$$

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{2}} - 1 = \frac{1}{\frac{n+2}{2}} - 1 = \frac{2}{n+2} - 1 = \frac{2-n-2}{n+2} = \frac{-n}{n+2}$$

**تمرين 17:** لتكن المتتالية الحسابية  $(u_n)_{n \geq 1}$  الذي أساسها  $r = 3$

وحدها الأول  $u_0 = 5$

(1) أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  وأوجد الحد التاسع

(2) أحسب المجموع التالي:  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{13}$

**أجوبة (1):** وبما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 3$  وحدها

الأول  $u_0 = 5$

$$\text{فان: } u_n = u_0 + (n-0)r \quad \text{أي: } u_n = 5 + 3(n-0) \quad \text{أي: } u_n = 3n + 5$$

$$\text{ومنه: } u_8 = 3 \times 8 + 5 = 29$$

$n = 5$  ومنه  $u_5 = 2 \times u_4 = 2 \times 80 = 160$  و

**تمرين 24:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة التالية

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = 3 \times u_n :$$

1. تحقق أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية

2. عبر عن  $U_n$  بدلالة  $n$

3. أحسب المجموع  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5$

$$\text{أجوبة (1)} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times u_n}{u_n} = 3 = q$$

اذن: المتتالية هندسية أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $u_0 = 3$

(2)  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $u_0 = 3$

اذن:  $u_n = 3 \times (3)^n = 3^1 \times (3)^n = (3)^{n+1}$  أي:  $u_n = u_0 q^{n-0}$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5 = u_1 \times \frac{1 - q^{5+1}}{1 - q} = u_1 \times \frac{1 - q^6}{1 - q} \quad (3)$$

$$u_1 = 3^{1+1} = 3^2 = 9$$

$$S_n = 9 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 9 \times \frac{1 - 3^6}{-2} = 9 \times \frac{-242}{-2} = 1029$$

**تمرين 25:** لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية بحيث  $u_5 = 486$

و  $u_7 = 4374$  و أساسها  $q > 0$

(1) حدد أساس المتتالية  $(u_n)$  (2) أحسب  $u_0$  و  $u_{10}$

(3) أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  (4) أحسب المجموع التالي:  $S = u_0 + u_5 + \dots + u_{2009}$

**أجوبة (1):**  $(u_n)$  متتالية هندسية اذن:

$$q^2 = \frac{4374}{486} = 9 \text{ يعني } u_7 = u_5 q^{7-5}$$

يعني  $q = 3$  أو  $q = -3$  وحسب المعطيات:  $q > 0$

اذن:  $q = 3$

(2)  $(u_n)$  متتالية هندسية اذن:  $u_5 = u_0 q^{5-0}$

$$u_0 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2 \text{ يعني } 486 = u_0 3^5$$

$$u_{10} = u_7 q^{10-7} \text{ يعني } u_{10} = u_7 q^3$$

$$u_{10} = 4374 \times 3^3 = 4374 \times 27 = 118098$$

$$u_n = 2 \times 3^n \text{ يعني } u_n = u_0 q^{n-0} \quad (3)$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2009} = u_0 \times \frac{1 - q^{2009+1}}{1 - q} = u_0 \times \frac{1 - q^{2010}}{1 - q} \quad (4)$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^{2010}}{1 - 3} = - (1 - 3^{2010}) = 3^{2010} - 1$$

**تمرين 26:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$

3. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

4. أحسب  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

$$\text{الجواب: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{2n+3}}{5 \times 3^{2n+1}} = \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}} = 3^{(2n+3)-(2n+1)} = 3^2 = 9 = q$$

اذن: المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية أساسها  $q = 9$  وحدها الأول  $u_0 = 15$

**تمرين 21:** لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية بحيث:

$$u_2 = \frac{9}{2} \text{ و } u_5 = \frac{243}{2}$$

حدد  $q$  أساس المتتالية  $(u_n)$  و أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة** لدينا  $(u_n)$  متتالية هندسية اذن:  $u_n = u_m q^{n-m}$

$$\text{ومنه: اذن: } u_5 = u_2 q^{5-2} \text{ يعني } \frac{243}{2} = \frac{9}{2} q^3$$

$$\text{يعني } q^3 = \frac{243}{9} \text{ يعني } q^3 = 27 \text{ يعني } q = 3$$

$$\text{لدينا أيضا: } u_n = u_2 q^{n-2}$$

$$\text{يعني: } u_n = \frac{9}{2} 3^{n-2} = \frac{3^2 \times 3^{n-2}}{2} = \frac{3^{n-2+2}}{2} = \frac{3^n}{2}$$

**تمرين 22:** نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)$  بحيث حدها الأول  $u_0 = 81$

و أساسها  $q = \frac{1}{3}$

(1) أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  (2) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$

(3) حدد العدد الصحيح الطبيعي  $n$  بحيث  $u_n = 1$

**أجوبة (1)** نعلم أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية

أساسها  $q = \frac{1}{3}$  وحدها الأول  $u_0 = 81$

اذن:  $u_n = u_0 q^{n-0}$  ومنه:  $u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27 \quad (2)$$

$$\text{و } u_3 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$$

$$(3) \quad u_n = 1 \text{ يعني } 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 \text{ يعني } 81 \times \frac{1}{3^n} = 1 \text{ يعني } \frac{81}{3^n} = 1$$

$$81 = 3^n \text{ يعني } n = 4$$

**تمرين 23:** نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)$  بحيث حدها الأول  $u_0 = 5$

و  $u_3 = 40$

1. تحقق أن أساس المتتالية  $(u_n)$  هو  $q = 2$

2. أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  و أحسب  $u_4$

3. حدد العدد الصحيح الطبيعي  $n$  بحيث  $u_n = 160$

**أجوبة (1)** نعلم أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية اذن:

اذن:  $u_3 = u_0 q^{3-0}$  يعني  $40 = 5q^3$  يعني  $q^3 = \frac{40}{5}$  يعني:

$$q^3 = 8 \text{ يعني } q = 2$$

$$(2) \quad u_n = 5 \times (2)^n$$

$$\text{و } u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$$

$$u_4 = 5 \times (2)^4 = 5 \times 16 = 80$$

$$(3) \quad u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$$

5. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

6. أحسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

**أجوبة: 1** نعوض بـ 0

$$\text{فوجد: } u_1 = \frac{23}{3} \text{ اذن } u_{0+1} = \frac{2}{3} \times u_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 10 + 1 = \frac{20}{3} + 1 = \frac{20}{3} + \frac{3}{3} = \frac{23}{3}$$

نعوض بـ 1

$$\text{فوجد: } u_2 = \frac{55}{9} \text{ اذن } u_{1+1} = \frac{2}{3} \times u_1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{23}{3} + 1 = \frac{46}{9} + 1 = \frac{46}{9} + \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$$

$$\text{نعوض بـ 0 فنجد: } v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$$

$$\text{نعوض بـ 1 فنجد: } v_1 = u_1 - 3 = \frac{23}{3} - 3 = \frac{23}{3} - \frac{9}{3} = \frac{14}{3}$$

(2) نستعمل برهانا بالترجع

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ  $n=0$

لدينا  $u_0 = 10 \geq 3$  اذن: العبارة صحيحة بالنسبة لـ  $n=0$

(ب) نفترض أن:  $u_n \geq 3$

(ج) نبين أن:  $u_{n+1} \geq 3$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}(u_n - 3)$$

و حسب افتراض التراجع لدينا:  $u_n \geq 3$

اذن:  $u_n - 3 \geq 0$  منه  $u_{n+1} - 3 \geq 0$  وبالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 3$

(3) دراسة رتبة المتتالية  $(u_n)$

نحسب:  $u_{n+1} - u_n$  وندرس الإشارة:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 1 = -\frac{1}{3}(u_n - 3)$$

نعلم أن:  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  اذن:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 3$  حسب السؤال (2) اذن:

ومنه المتتالية  $(u_n)$  تناقصية

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n + 1 - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n - 2}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{6}{3}}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}(u_n - 3)}{u_n - 3} = \frac{2}{3} = q \quad (4)$$

اذن: المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{3}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = 7$

(5) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$

بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول  $v_0 = 7$  فان:  $v_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$

لدينا:  $v_n = u_n - 3$  اذن:  $v_n + 3 = u_n$  أي:  $u_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (6)$$

$$S_n = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 21 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

**تمرين 27:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{6}{1+u_n} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و حدد أساسها  $q$  وحدها الأول

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

4. أحسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$\text{أجوبة: 1) نعوض بـ 0 فنجد: } u_1 = \frac{6}{1+u_0} = \frac{6}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ اذن } u_1 = \frac{3}{2}$$

$$v_1 = \frac{u_1 - 2}{u_1 + 3} = \frac{\frac{3}{2} - 2}{\frac{3}{2} + 3} = \frac{\frac{3-4}{2}}{\frac{3+6}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = -\frac{1}{9} \text{ و } v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$(2) v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{6}{1+u_n} - 2}{\frac{6}{1+u_n} + 3} = \frac{\frac{6-2(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{6+3(1+u_n)}{1+u_n}} = \frac{6-2-2u_n}{6+3+3u_n} = \frac{4-2u_n}{9+3u_n} = \frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)} = \frac{-2}{3} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times v_n$$

اذن: المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = -\frac{2}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{1}{6}$

(3) بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = -\frac{2}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{1}{6}$

فان:  $v_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$  استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$ :

$$\text{لدينا: } v_n u_n + 3v_n - u_n = -2 \Leftrightarrow v_n(u_n + 3) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

$$u_n = \frac{2+3v_n}{1-v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-2-3v_n}{v_n-1} \Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -2-3v_n \Leftrightarrow$$

$$\text{ونعلم أن: } v_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ اذن: } u_n = \frac{2+3 \times \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$u_n = \frac{2 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (4)$$

$$S_n = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{10} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

**تمرين 28:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ ونعتبر المتتالية}$$

العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{1}{u_n}$

1. أحسب  $u_2$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية و حدد أساسها  $q$  وحدها الأول

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

$$\text{أجوبة: 1) } v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ و } u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n-1}{u_n} = 1 = r \quad (2)$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 1$  وحدها الأول  $v_1 = 1$

3) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r=1$  وحدها الأول:  $v_1=1$

فان:  $v_n = v_1 + (n-1)r$  أي:  $v_n = 1 + (n-1)$  يعني  $v_n = n$

ونعلم أن:  $v_n = \frac{1}{u_n}$  يعني  $u_n = \frac{1}{v_n}$  ونعلم أن:  $v_n = n$  إذن:  $u_n = \frac{1}{n}$

**تمرين 29:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{1}{u_n}$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية و حدد أساسها و حددها الأول

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة** (1)  $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$  و  $u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

(2)  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n-1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2 = r$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r=2$  وحدها الأول:  $v_0=1$

3) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r=2$  وحدها الأول:  $v_0=1$

فان:  $v_n = v_0 + nr$  أي:  $v_n = 1 + 2n$

ونعلم أن:  $v_n = \frac{1}{u_n}$  يعني  $u_n = \frac{1}{v_n}$  ونعلم أن:  $v_n = 1 + 2n$  إذن:  $u_n = \frac{1}{1+2n}$

**تمرين 30:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$   $\forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$

2. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 2$

3. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  و استنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

5. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

6. أحسب المجموع التالي:  $S_2 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{11}$

**أجوبة** (1)  $v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{3 - 2} = 1$  و  $u_1 = \frac{5u_0 - 4}{u_0 + 1} = \frac{5 \cdot 3 - 4}{3 + 1} = \frac{15 - 4}{4} = \frac{11}{4}$

(2) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

لدينا  $u_0 = 3 \geq 2$  إذن: العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

ب) نفترض أن:  $u_n \geq 2$

ج) نبين أن:  $u_{n+1} \geq 2$  ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق:  $u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2 = \frac{5u_n - 4 - 2(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 6}{u_n + 1}$

$u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 1}$  و حسب افتراض الترجع لدينا:  $u_n \geq 2$

إذن:  $u_{n+1} - 2 \geq 0$  و  $u_n + 1 > 0$  و منه  $u_{n+1} - 2 \geq 0$

وبالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 2$

3)  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2}$  نعوض  $u_{n+1}$  ب  $\frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$

فنجد:  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{5u_n - 4 - 2(u_n + 1)}{u_n + 1}} - \frac{1}{u_n - 2}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{3u_n - 6} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} = \frac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} = \frac{1}{3} = r$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = \frac{1}{3}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

4) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = \frac{1}{3}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

فان:  $v_n = v_0 + nr$  أي:  $v_n = 1 + \frac{n}{3}$

نعلم أن:  $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$  يعني  $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$  يعني  $u_n = \frac{1}{v_n} + 2$

ونعلم أن:  $v_n = 1 + \frac{n}{3}$  إذن:

$u_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{3}} + 2 = \frac{1}{\frac{n+3}{3}} + 2 = \frac{3}{n+3} + 2 = \frac{3+2n+6}{n+3} = \frac{9+2n}{n+3}$

5) دراسة رتبة المتتالية  $(u_n)$

نحسب:  $u_{n+1} - u_n$  وندرس الإشارة:

$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n + 1}$

$-(u_n - 2)^2 \leq 0$  لأن:  $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^2 - 4u_n + 4}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1} \leq 0$

و  $u_n + 1 > 0$  حسب السؤال (2) ومنه المتتالية  $(u_n)$  تناقصية

$S = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{11} = 11 \times \frac{(v_1 + v_{11})}{2}$  (6)

لدينا:  $v_n = 1 + \frac{n}{3}$  إذن:  $v_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$  و  $v_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$S = 11 \times \frac{\left(\frac{4}{3} + \frac{14}{3}\right)}{2} = 11 \times \frac{18}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{198}{3 \times 2} = 33$

**تمرين 31:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$   $\forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$

2. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 1$

3. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  و استنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة** (1)  $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1$  و  $u_1 = \frac{5u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{10 - 1}{2 + 3} = \frac{9}{5}$

(2) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

لدينا  $u_0 = 2 \geq 1$  إذن: العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

ب) نفترض أن:  $u_n \geq 1$

ج) نبين أن:  $u_{n+1} \geq 1$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } \frac{5u_n-1}{u_n+3} - 1 = \frac{5u_n-1-(u_n+3)}{u_n+3} = \frac{4u_n-4}{u_n+3} = \frac{4(u_n-1)}{u_n+3}$$

و حسب افتراض التراجع لدينا:  $u_n \geq 1$

اذن:  $u_{n+1}-1 \geq 0$  و  $u_n+3 > 0$  و منه  $u_{n+1}-1 \geq 0$

وبالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 1$

$$(3) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3+u_n} - \frac{1}{u_{n+1}-1} \quad \text{نعوض } u_{n+1} \text{ بـ } \frac{u_n-1}{3+u_n}$$

ف نجد:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3} - 1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+3}{4u_n-4} - \frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3-4}{4u_n-4} = \frac{u_n-1}{4u_n-4} = \frac{u_n-1}{4(u_n-1)} = \frac{1}{4} = r$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = \frac{1}{4}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

(4) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = \frac{1}{4}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

فان:  $v_n = v_0 + nr$  أي:  $v_n = 1 + \frac{n}{4}$

(5) نعلم أن:  $v_n = \frac{1}{u_n-1}$  يعني  $u_n-1 = \frac{1}{v_n}$  يعني  $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

ونعلم أن:  $v_n = 1 + \frac{n}{4}$  اذن:

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} + 1 = \frac{1}{\frac{n+4}{4}} + 1 = \frac{4}{n+4} + 1 = \frac{4+n+4}{n+4} = \frac{n+8}{n+4}$$

**تمرين 32:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -1 - \frac{1}{4u_n} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{2}{2u_n+1}$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$

2. بين أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة:** (1)  $u_1 = -\frac{3}{2}$  و  $u_2 = -\frac{5}{6}$  و  $u_3 = -\frac{7}{10}$

$$(2) \quad v_{n+1} - v_n = -2 \quad \text{نعوض } u_{n+1} \text{ بـ } \frac{u_n-1}{3+u_n}$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = -2$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

(3) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = \frac{1}{4}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

فان:  $v_n = v_0 + nr$  أي:  $v_n = -2n+1$

$$\text{نعلم أن: } v_n = \frac{2}{2u_n+1} \text{ يعني } u_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{2} \text{ يعني } u_n = \frac{1}{-2n+1} - \frac{1}{2}$$

**تمرين 33:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+3} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$

1. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 1$

2. أبين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة:**

(1) نستعمل برهانا بالتراجع

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

لدينا  $u_0 = 2 > 1$  اذن: العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

(ب) نفترض أن:  $u_n \geq 1$

(ج) نبين أن:  $u_{n+1} \geq 1$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } \frac{5u_n-1}{2u_n+3} - 1 = \frac{5u_n-(2u_n+3)}{2u_n+3} = \frac{3u_n-3}{2u_n+3} = \frac{3(u_n-1)}{2u_n+3}$$

و حسب افتراض التراجع لدينا:  $u_n > 1$

اذن:  $u_{n+1}-1 \geq 0$  و  $2u_n+3 > 0$  و  $u_n-1 > 0$

وبالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 1$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n-1}{2u_n+3} - 1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{3u_n}{2u_n+3}} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+3}{4u_n-4} - \frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3-4}{4u_n-4} = \frac{u_n-1}{4u_n-4} = \frac{u_n-1}{4(u_n-1)} = \frac{1}{4} = r$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = \frac{1}{4}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

(3) بما أن:  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها:  $r = \frac{1}{4}$  وحدها الأول:  $v_0 = 1$

فان:  $v_n = v_0 + nr$  أي:  $v_n = 1 + \frac{n}{4}$

نعلم أن:  $v_n = \frac{1}{u_n-1}$  يعني  $u_n-1 = \frac{1}{v_n}$  يعني  $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

ونعلم أن:  $v_n = 1 + \frac{n}{4}$  اذن:

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} + 1 = \frac{1}{\frac{n+4}{4}} + 1 = \frac{4}{n+4} + 1 = \frac{4+n+4}{n+4} = \frac{n+8}{n+4}$$

**تمرين 34:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{3u_n+7} \\ u_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

1. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 1$

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

3. أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول

4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة:**

(1) نستعمل برهانا بالتراجع

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

لدينا  $u_0 = \frac{7}{3} \geq 1$  اذن: العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n=0$

(ب) نفترض أن:  $u_n \geq 1$

(ج) نبين أن:  $u_{n+1} \geq 1$  ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } \frac{7u_n+3}{3u_n+7} - 1 = \frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7} = \frac{4u_n-4}{3u_n+7} = \frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}$$



وحسب افتراض التراجع لدينا :  $u_n > 1$

وبالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 1$

(2) دراسة رتبة المتتالية  $(u_n)$  نحسب :  $u_{n+1} - u_n$  وندرس الإشارة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - u_n = \frac{7u_n + 3 - u_n(3u_n + 7)}{3u_n + 7} = \frac{-3u_n^2 + 3}{3u_n + 7}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3(u_n + 1)(u_n - 1)}{3u_n + 7}$$

ولدينا :  $u_n \geq 1$  اذن :  $u_n + 1 \geq 0$  و  $u_n - 1 \geq 0$  و  $3u_n + 7 > 0$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  وبالتالي  $(u_n)$  تناقصية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - 1}{\frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} + 1} = \frac{7u_n + 3 - (3u_n + 7)}{7u_n + 3 + (3u_n + 7)} = \frac{4u_n - 4}{10u_n + 10} = \frac{4u_n - 4}{10u_n + 10}$$

$$v_{n+1} = \frac{4(u_n - 1)}{10(u_n + 1)} = \frac{2u_n - 1}{5u_n + 1} = \frac{2}{5}v_n$$

اذن : المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{2}{5}$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{\frac{7}{3} - 1}{\frac{7}{3} + 1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{2}{5}$$

(4) بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{2}{5}$  وحدها الأول  $v_0 = \frac{2}{5}$

فان :  $v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$  **استنتاج**  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  اذن :  $v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n + v_n - u_n = -1$

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - v_n \Leftrightarrow$$

$$u_n = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$$

**تمرين 35:** تعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

1. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq u_n \leq 3$

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

3. أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول

4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**أجوبة:**

1: نستعمل برهانا بالتراجع

$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq u_n$  : نبين أولاً أن :

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

لدينا  $u_0 = 1 \geq 0$  اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

(ب) نفترض أن :  $u_n \geq 0$

(ج) نبين أن :  $u_{n+1} \geq 0$  ؟؟؟؟؟

وحسب افتراض التراجع لدينا :  $u_n \geq 0$  اذن :  $u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 0$

نبين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq 3$

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

لدينا  $u_0 = 1 \leq 3$  اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل  $n = 0$

(ب) نفترض أن :  $u_n \leq 3$

(ج) نبين أن :  $u_{n+1} \leq 3$  ؟؟؟؟؟ نحسب الفرق :

$$3 - u_{n+1} = 3 - \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{3(u_n + 3) - (5u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-2u_n + 6}{u_n + 3} = \frac{-2(u_n - 3)}{u_n + 3}$$

و حسب افتراض التراجع لدينا :  $u_n \leq 3$

اذن :  $u_n - 3 \leq 0$  و  $u_n + 3 > 0$  لأن  $u_n \geq 0$  ومنه  $3 - u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq 3$

(2) دراسة رتبة المتتالية  $(u_n)$  نحسب :  $u_{n+1} - u_n$  وندرس الإشارة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - u_n = \frac{5u_n + 3 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{u_n + 3}$$

نعمل  $\Delta = -u_n^2 + 2u_n + 3$  نحسب المميز  $\Delta$

$$x_2 = \frac{-2 - 4}{-2} = 3 \text{ و } x_1 = \frac{-2 + 4}{-2} = -1 \text{ هناك جذرين : } \Delta = 4 + 12 = 16 > 0$$

ومنه التعميل :  $-u_n^2 + 2u_n + 3 = -(u_n - 3)(u_n + 1)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 3}$$

لدينا :  $u_n \geq 0$  اذن :  $u_n + 3 \geq 0$  و  $u_n + 1 \geq 0$

ولدينا :  $u_n \leq 3$  اذن :  $u_n - 3 \leq 0$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  وبالتالي  $(u_n)$  تزايدية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - 3}{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} + 1} = \frac{5u_n + 3 - 3(u_n + 3)}{5u_n + 3 + (u_n + 3)} = \frac{2u_n - 6}{6u_n + 6} = \frac{2u_n - 6}{6u_n + 6}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n - 3)}{6(u_n + 1)} = \frac{1u_n - 3}{3u_n + 1} = \frac{1}{3}v_n$$

اذن : المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 1} = \frac{1 - 3}{1 + 1} = -1$$

(4) بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = -1$

$$v_n = (-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

**استنتاج**  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$  اذن :  $v_n(u_n + 1) = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n u_n + v_n - u_n = -3$

$$u_n = \frac{3 + v_n}{1 - v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-3 - v_n}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3 - v_n \Leftrightarrow$$

ونعلم أن :

$$u_n = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

