التمرين الأول

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3+2u_n} \end{cases}$

1. أ) بين بالترجع أن : $u_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية

2. نضع : لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad v_n = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{2}{3}$

ب) عبر عن v_n بدلالة n و أن $u_n = \dfrac{2}{3^{n+1} - 2}$

3. نعتبر المجموع : $S_n = \dfrac{1}{u_0 + 1} + \dfrac{1}{u_1 + 1} + ... + \dfrac{1}{u_n + 1}$ بين أن : $S_n = n + \dfrac{1}{3^{n+1}}$

التمرين الثاني

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3+2u_n} \end{cases}$

1. أ) بين بالترجع أن : $u_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية

2. نضع : لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $v_0 = 2$

ب) عبر عن v_n بدلالة n و أن $u_n = \dfrac{1}{2 \times 3^n - 1}$

3. نعتبر المجموع : $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + ... + \dfrac{1}{u_{n-1}}$ بين أن : $S_n = 3^n - n - 1$

التمرين الثالث

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{3u_n + 5} \end{cases}$

1. أ) بين بالترجع أن : $u_n > 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية ماذا تستنتج ؟

2. نضع : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) بين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية ا أساسها $q = \dfrac{1}{4}$ و أحسب حدها الأول v_0

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^{2n+1}+1}{2^{2n+1}-1}$

ج) أحسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$

التمرين الرابع

لتكن المتتالية العددية $(U_n)_u$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{5-2U_n} \end{cases}$

1. أ) تحقق أن : $1 - 2U_{n+1} = \frac{3(1-2U_n)}{4+(1-2U_n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين بالترجع أن : $U_n < \frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2. أ) بين أن $U_{n+1} - U_n = \frac{(1-U_n)(1-2U_n)}{4+(1-2U_n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) استنتج أن المتتالية $(U_n)_u$ تزايدية

3. نضع : لكل n من $\mathbb{N}$: $V_n = \frac{2U_n - 1}{U_n - 1}$

أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ و حدها الأول $V_0 = 1$

ب) عبر عن V_n بدلالة n و استنتج أن $U_n = \frac{2^{2n} - 3^n}{2^{2n+1} - 3^n}$

التمرين الخامس

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} \end{cases}$

1. بين بالترجع أن : $u_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
2. بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية
3. نعتبر المتتالية $(v_n)_n$ بحيث : $v_n = \frac{2}{u_n^2}$

أ) بين أن $(v_n)_n$ متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n

التمرين السادس

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$

1. تحقق أن $U_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{U_n + 4}$ و بين بالترجع أن $0 < U_n < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2. بين ان $U_n - U_{n+1} = \dfrac{(U_n + 1)^2 - 4}{U_n + 4}$ ثم ادرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3. أ) بين أن $|U_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{4}|U_n - 1| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن $|U_n - 1| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين السابع

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 4$ و $U_{n+1} = 6 - \dfrac{9}{U_n}$

1) بين أن $U_n > 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

3) نضع $V_n = \dfrac{3}{U_n - 3}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ حسابية أساسها $q = 1$ و أحسب الحد العام V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \dfrac{3n + 12}{n + 3}$

ج- أحسب بدلالة n الجمع $S = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$

التمرين الثامن

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt{U_n}\right)^2 \end{cases}$

1) احسب U_1 و U_2

2) بين بالترجع أن $0 < U_n < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) بين بالترجع أن $(U_n)_n$ متتالية تزايدية

4) نضع $W_n = \sqrt{U_n} - 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) بين أن $(W_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$

ب) أكتب كل من W_n و U_n بدلالة n

ج) نعتبر المجموع : $S_n = \sqrt{U_0} + \sqrt{U_1} + ... + \sqrt{U_n}$ بين أن $S_n = n - 1 + \dfrac{1}{2^n}$

التمرين التاسع

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{6U_n - 4}{U_n + 2} \end{cases}$

جـ بين أن $U_n > 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3- نضع $V_n = \frac{2}{U_n - 2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية و أحسب V_n بدلالة n

ج- حدد الحد العام U_n بدلالة n

ج- أحسب الجمع $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}$

التمرين العاشر

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بنا يلي : $U_0 = \frac{5}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{2}{9}U_n^2 + 1$

1) بين أن $\frac{3}{2} < U_n < 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{9}(U_n - 3)(2U_n - 3)$ ثم أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة

4) أ- بين أن $U_{n+1} - 3 \leq \frac{8}{9}(U_n - 3)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $U_n - 3 \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين الحادي عشر

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ ونضع $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$

1) بين أن الدالة f تزايدية على المجال $I = [0,1]$

2) أ- بين أن $0 \leq U_n < 1$: $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أحسب U_1 وبين بالترجع أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) نضع $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية

ب- حدد V_n بدلالة n و استنتج U_n بدلالة n

4) أ- تحقق أن $1 - U_{n+1} = \frac{2(1 - U_n)}{U_n + 4}$ وبين أن $1 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - U_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين بالترجع أن $1 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$