تعريف :

➢ نقول بأن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كان للنسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية l في x_0

➢ l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونرمز له ب: $f'(x_0)=l$ ونكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

تأويل هندسي :

➢ في هذه الحالة نقول بأن C_f يقبل في النقطة x_0 مستقيم مماس معادلته :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

التمرين الأول :

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة x_0 في الحالات التالية :

① $x_0=2 \;;\; f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$

② $x_0=-1 \;;\; f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x-1}$

③ $x_0=3 \;;\; f(x)=\sqrt{2x+3}-2$

④ $x_0=0 \;;\; f(x)=x+\cos x$

⑤ $x_0=0 \;;\; f(x)=\frac{x|x|+x-1}{x+1}$

⑥ $\begin{cases} f(x)=\frac{(1-\cos x)^2}{x^3} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} f(x)=\frac{1-\cos 3x}{\sin 2x} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} f(x)=\frac{x-2\sin x}{x-\sin 2x} & x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases} \quad ; \; x_0=0$

قابلية الاشتقاق على يمين و على يسار النقطة x_0 :

➲ نقول بأن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين إذا كان للنسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية l_1 عندما تؤول x إلى x_0 على يمين x_0 $(x>x_0)$

➲ l_1 يسمى العدد المشتق للدالة f على يمين x_0 ونرمزله ب: $f'_d(x_0)=l_1$ ونكتب $f'_d(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

➲ نقول بأن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار إذا كان للنسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية l_2 عندما تؤول x إلى x_0 على يسار x_0 $(x<x_0)$

➲ l_2 يسمى العدد المشتق للدالة f على يسار x_0 ونرمزله ب: $f'_g(x_0)=l_2$ ونكتب $f'_g(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

خاصية :

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا و فقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

التمرين الثاني :

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين وعلى يسار x_0 في الحالات التالية :

❶ $x_0=0 \;;\; f(x)=\frac{1-|x|}{|x|+1}$

❷ $x_0=0 \;;\; f(x)=|x|-\cos x$

❸ $x_0=2 \;;\; f(x)=\frac{x+|x-2|}{x-1}$

❹ $x_0=-1 \;;\; f(x)=\frac{|x^2+x|+2}{|x|+1}$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{2x^2}{x-1} & x>0 \\ f(x)=\frac{x}{x^2-1} & x\leq 0 \end{cases}$$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \;;\; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$

3) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$

4) أدرس قابلية اشتقاق f على يمين وعلى يسار 0