مذكرة رقم 9 في درس الاشتقاق

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ قابلية اشتقاق دالة في نقطة x_0 ؛ العدد المشتق؛ التأويل الهندسي للعدد المشتق و المماس لمنحنى؛ تقريب دالة قابلة للاشتقاق في نقطة بدالة تآلفية؛ ـ الاشتقاق على اليمين؛ الاشتقاق على اليسار؛ نصف مماس؛ مماس أو نصف مماس عمودي؛ ـ الاشتقاق على مجال؛ المشتقة الأولى؛ المشتقة الثانية؛ المشتقات المتتالية؛ ـ اشتقاق الدوال $f+g$ ، λf ، fg ، $\frac{1}{f}$ ، $\frac{f}{g}$ ، f^n $(n\in\mathbb{Z})$ ؛ $f(ax+b)$ ؛ $\sqrt{f}$. ـ رتابة دالة وإشارة مشتقتها؛ مطاريف دالة قابلة للاشتقاق على مجال. ـ المعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2 y=0$.	ـ تقريب دالة بجوار نقطة x_0 بدالة تآلفية؛ ـ التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس منحنى الدالة في النقطة التي أفصولها x_0؛ ـ التعرف على مشتقات الدوال المرجعية؛ ـ التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة؛ ـ تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ ـ تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ ـ تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛ ـ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية .	ـ من بين الأمثلة التي يمكن معالجتها: تقريب الدوال المعرفة بما يلي: $h\to(1+h)^2$ و $h\to(1+h)^3$ و $h\to\frac{1}{1+h}$ و $h\to\sqrt{1+h}$ بجوار الصفر بدوال تآلفية. ـ توظف النهاية $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ في تحديد مشتقة كل من الدالتين $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$. ـ تقبل المبرهنات المتعلقة بالرتابة وإشارة المشتقة الأولى؛ ـ يقبل الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2 y=0$

I. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

1. العدد المشتق

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$$

يسمى العدد l المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

ونكتب : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

ملاحظة : الكتابة : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

تكافئ الكتابة : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$

الجواب : $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

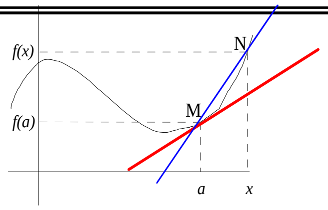
$=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}5(x+1)=5\times2=10$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

و هو العدد المشتق عند $x_0=1$: $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق ـ معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a;f(a))$ و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f) في النقطة M

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a;f(a))$ هي :

$$(\Delta)\ :\ y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب: 1) $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

و هو العدد المشتق عند $x_0=2$: $2=f'(2)$

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=2x-3$

II. الاشتقاق على اليمين ـ الاشتقاق على اليسار

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=0$)
2. أحسب $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليسارعند $x_0=0$)

3.هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟

4.حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

5.حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

6.كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x)=x^3+x; x\geq 0 \\ f(x)=x^3-x; x\leq 0 \end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2+1=1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $1=f'_d(0)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2-1=-1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=f'_g(0)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=x \Leftrightarrow y=0+1(x-0) \Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-x \Leftrightarrow y=0-1(x-0) \Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$

6) لدينا $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة a و $f'_g(a)=f'_d(a)$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=|x^2-1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=1$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.
5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=1$.
6. كيف نسمي النقطة $A(1,f(1))$ ؟

الجواب : $f(x)=|x^2-1|$ ندرس اشارة :

x^2-1 : $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

ومنه : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1] \end{cases}$ و $f(1)=|1^2-1|=0$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}x+1=2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$ و $2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $-2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=1$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار عند $x_0=1$

ولكن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=2x-4 \Leftrightarrow y=0+2(x-2) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-2x+2 \Leftrightarrow y=0-2(x-1) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_g(1)(x-1)$

6) لدينا $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1;f(1))$ تسمى نقطة مزواة

III. الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف: f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ و المعرفة كما يلي: $\begin{array}{l} f': I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f'(x) \end{array}$

IV. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

(أنظر الجدول1 و 2)

أمثلة: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 5) $f(x)=\frac{5}{x}$ 6) $f(x)=6\sqrt{x}-4$

7) $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$ 8) $f(x)=\cos(7x+2)$

9) $f(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)$ 10) $f(x)=3\tan x-1$

11) $f(x)=x\cos x$ 12) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 14) $f(x)=(3x+4)^3$ 15) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

أجوبة : 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

4) $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times 3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times 2x-0=12x^2-x$

الأستاذ : عثماني نجيب

(5 $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

(6 $f'(x)=\left(6\sqrt{x}-4\right)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

(7 $f'(x)=\left(6x^4-\cos x+3\sin x\right)'=6\times4x^3+\sin x+3\cos x=24x^3+\sin x+3\cos x$

(8 $f'(x)=\cos(7x+2)'=-7\times\sin(7x+2)$

(9 $f'(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)'=5\frac{4}{5}\times\cos(5x+4)=4\times\cos(5x+4)$

(10 $f'(x)=(3\tan x-1)'=3\times(1+\tan^2 x)-0=3\times(1+\tan^2 x)$

(11 نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=(x\times\cos x)'=x'\times\cos x+x\times\cos' x=1\times\cos x-x\times\sin x=\cos x-x\sin x$

(12 نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

(13 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$

(14 $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$

(15 نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

تمرين3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x)=11$ (2 $f(x)=7x+15$ (3 $f(x)=2x^3$

(4 $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ (5 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

(6 $f(x)=\frac{3}{x}$ (7 $f(x)=4\sqrt{x}-1$ (8 $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

(9 $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ (10 $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

(11 $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ (12 $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ (13 $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

(14 $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ (15 $f(x)=(2x-1)^7$

أجوبة : (1 $f'(x)=(11)'=0$ (2 $f'(x)=(7x+15)'=7$

(3 $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

(4 $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

(5 $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

(6 $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

(7 $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

(8 $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

(9 $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$

نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$

$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$

(10 نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$

(11 $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$

(12 $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$

$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$

(13 $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$

(14 $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$

(15 $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$

V.الدالة المشتقة الثانية-المشتقات المتتالية

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-5x^2+4x-2$

أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

الجواب:

$f'(x)=\left(x^3-5x^2+4x-2\right)'=3x^2-5\times2x^1+4-0=3x^2-10x+4$

$f''(x)=\left(3x^2-10x+4\right)'=6x-10$ و $f'''(x)=(6x-10)'=6$

VI.تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

• f تزايدية على مجال I يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\geq 0$

- f تناقصية على مجال I يعني $f'(x) \le 0$ $\forall x\in I$
- f ثابتة على مجال I يعني $f'(x) = 0$ $\forall x\in I$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات 4) حدد جدول تغيرات f

الجواب: 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(x^2+2x-2\right)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\ge 0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\le 0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2. مطار يف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرا فا في النقطة a فان $f'(a)=0$

خاصية 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطرا فا للدالة f

مثال: حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-6x+1$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\left(x^2-6x+1\right)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ مطرا ف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+x+1$

أو $f(x)=-x^2+2x+3$ أو $f(x)=-x^2+x$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

الجواب: $f(x)=2x^2+x+1$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x+1$	$-$	0	$+$

4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

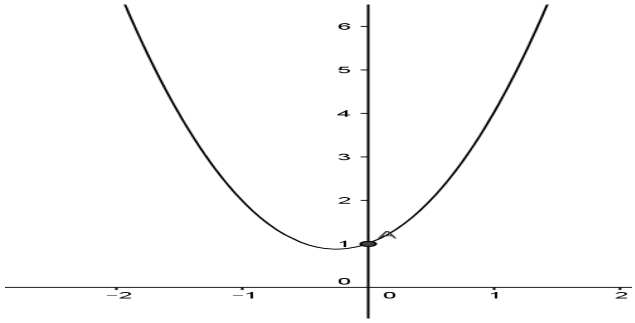
$f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8) رسم: C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11

الأستاذ : عثماني نجيب



ملاحظة : بالنسبة ل $f(x)=-x^2+2x+3$ وتحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ **و** $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$

<u>تمرين5:</u> نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|(x-1)$$

1)أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

2)هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

3)أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0=0$

<u>الجواب :</u>
$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(1)=1^2+2\times1=3$$

$$(1\quad \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\dfrac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية x^2+2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}x+3=4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f'_g(1)=4$

2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

(3 $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$
$$\begin{cases} g(x)=x(x-1); x\ge0 \\ g(x)=-x(x-1); x\le0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x-1=-1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $f'_d(0)=-1$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}-x+1=1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $g'_g(0)=-1$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$

ولكن : $g'_d(0)\ne g'_g(0)$

ومنه : g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

3. حل معادلة تفاضلية

تعريف:ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

- المعادلة $y''+\omega^2y=0$ ذات المجهول الدالة y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.
- كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

وتحقق المتساوية : $f''(x)+\omega^2f(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$

تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$.

خاصية:ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$.

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

ملحوظة :حل المعادلة التفاضلية : $y''+\omega^2y=0$

يعني تحديد الحل العام للمعادلة.

<u>مثال:</u>حل المعادلة التفاضلية التالية: $y''+16y=0$

الجواب : $y''+4^2y=0\Leftrightarrow y''+16y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+16y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos4x+\beta\sin4x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

<u>تمرين6:</u> حل المعادلات التفاضلية التالية: 1) $y''+4y=0$

2) $y''+8y=0$ 3) $y''+y=0$ 4) $9y''+16y=0$

<u>الجواب</u> 1) $y''+2^2y=0\Leftrightarrow y''+4y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos2x+\beta\sin2x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

2) $y''+\left(2\sqrt{2}\right)^2y=0\Leftrightarrow y''+8y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos2\sqrt{2}x+\beta\sin2\sqrt{2}x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

3) $y''+y=0\Leftrightarrow y''+1^2y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos1x+\beta\sin1x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

4) $y''+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2y=0\Leftrightarrow y''+\dfrac{16}{9}y=0\Leftrightarrow9y''+16y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos\dfrac{4}{3}x+\beta\sin\dfrac{4}{3}x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

الأستاذ : عثماني نجيب

جدو ل للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال

لدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1} \qquad n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\dfrac{1}{u}$	$f'(x)=-\dfrac{u'}{u^2}$
$f(x)=\dfrac{u}{v}$	$f'(x)=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$