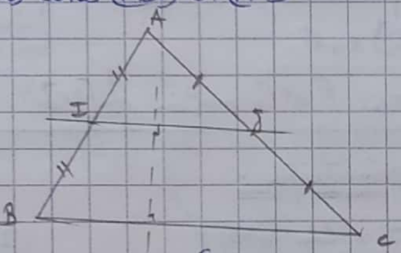
Chapitre ⑥: Triangle et droites parallèles

I_ La droite passante par les milieux de deux côtés d'un triangle:

1) Exemple:

Soit ABC un triangle et I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]



On remarque que (IJ) // (BC) grâce à la droite auxiliaire

et on a aussi $IJ = \frac{1}{2} BC$

2) Propriétés:

a) Propriété ①:

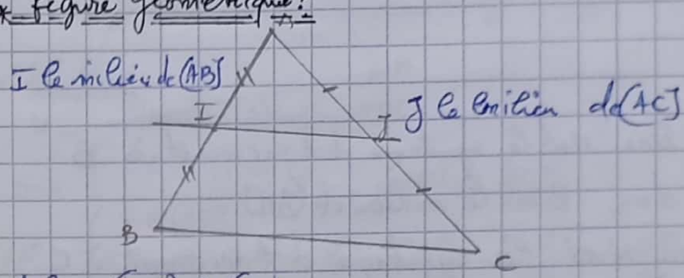
> La droite passante par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.
>
> Autrement dit:
> Soit ABC un triangle
> Si $\begin{cases} I \text{ milieu de } [AB] \\ J \text{ milieu de } [AC] \end{cases}$ alors: $\boxed{(IJ) // (BC)}$

* Remarques importantes:

1°) Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle et deux milieux de deux côtés.

2°) On utilise cette propriété pour montrer que deux droites sont parallèles

* figure géométrique:

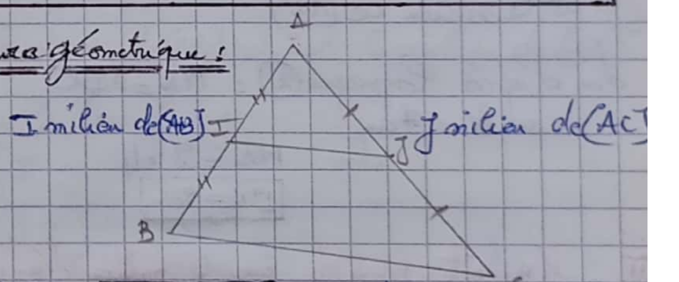


Alors (IJ) // (BC)

b) Propriété ②:

> La distance entre les milieux de deux côtés d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté
>
> Autrement dit
> Soit ABC un triangle
> Si $\begin{cases} I \text{ le milieu de } [AB] \\ J \text{ le milieu de } [AC] \end{cases}$ alors $\boxed{IJ = \frac{1}{2} BC}$

* figure géométrique:



Alors $\boxed{IJ = \frac{1}{2} BC}$ càd $\boxed{BC = 2IJ}$

* Remarques importantes:

1°/ Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle et de deux milieux de deux côtés.

2°/ On utilise cette propriété pour calculer les longueurs.

3°/ Exercice d'application ①:

Soit ABC un triangle tel que BC = 4cm

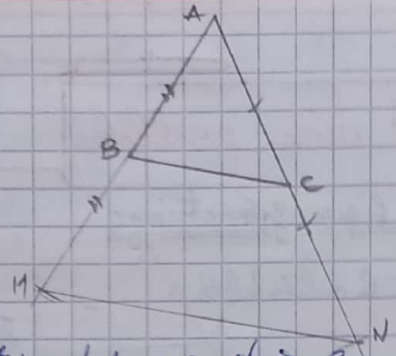
Soient M et N les symétriques respectifs du point A par rapport à B et C

1°) Tracer la figure

2°) Montrer que (MN) // (BC)

3°) Montrer que MN = 8 cm

Solution : 1°) figure



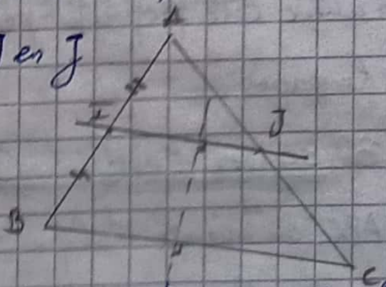
2°) On a M est le symétrique de A par rapport à B
donc B est le milieu de [AM]
On a N est le symétrique de A par rapport à C
donc C est le milieu de [AN]
Dans le triangle AMN, on a :
{B est le milieu de [AM]
{C est le milieu de [AN]
donc d'après la propriété ① : (MN) // (BC)

3°) Dans le triangle AMN, on a :
{B est le milieu de [AM]
{C est le milieu de [AN]
donc d'après la propriété ② : $MN = 2BC$
or $BC = 4cm$
donc $MN = 2 \times 4$
$\boxed{MN = 8cm}$

II - La droite passante par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle au deuxième côté

1) Exemple :

Soit ABC un triangle et I le milieu de [AB]
La droite qui passe par I et parallèle à (BC) coupe le côté [AC] en J



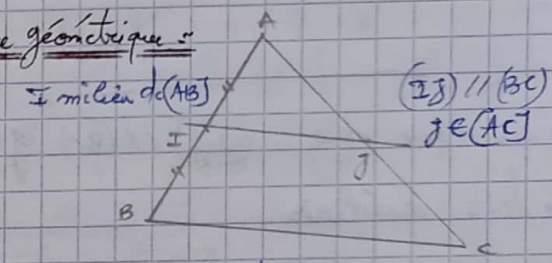
En utilisant le compas, on trouve que J est le milieu du côté [AC]

2) Propriété ③ :

La droite passante par le milieu du côté d'un triangle et parallèle au deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

Autrement dit,
Soit ABC un triangle
Si {• I le milieu de [AB]
{• La parallèle à (BC) passante par I coupe [AC] en J.
Alors : J est le milieu de [AC]

* figure géométrique :



Alors J est le milieu de [AC]

* Remarques importantes :

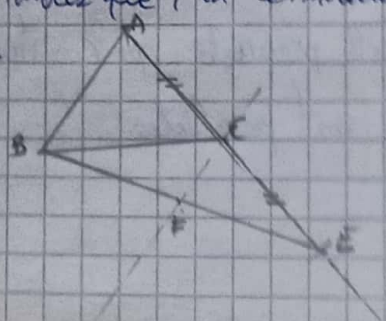
1°) Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle, le milieu d'un côté et d'une parallèle au deuxième côté qui passe par ce milieu.

2°) On utilise cette propriété pour montrer le milieu du côté d'un triangle.

3) Exercice d'application ② :

Soit ABC un triangle et E le symétrique du point A par rapport à C. La parallèle à (AB) passante par C coupe [BE] en F.
1°) Tracer la figure
2°) Montrer que F est le milieu de [BE]

Solution :
1°)



2°) On a E est le symétrique de A par rapport à C, alors C est le milieu de [AE]
Donc Dans le triangle ABE, on a:

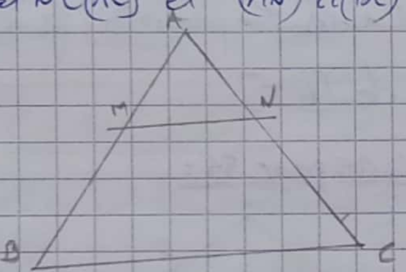
$\begin{cases} * \text{ C est le milieu du côté [AE]} \\ * \text{ la parallèle à (AB) passant par C coupe (BE] en F} \end{cases}$

D'où: F est le milieu du côté [BE]

III _ La droite parallèle à un côté dans un triangle:

1) Exemple:

Soit ABC un triangle tel que:
$M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ et $(MN) // (BC)$



Donc cela nous permis d'écrire $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

2) Propriété ④ : propo de Thalès

Dans un triangle ABC
Si $\begin{cases} M \in [AB] \\ N \in [AC] \end{cases}$ tel que $(MN) // (BC)$
Alors: $\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$

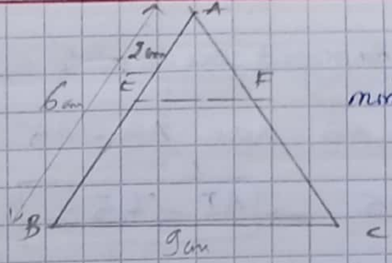
* Remarques importantes:

1°) Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle et une parallèle à un côté qui coupe les deux autres côtés.

2°) On utilise cette propriété pour calculer les longueurs.

3) Exercice d'application ③:

On considère la figure suivante tel que:
ABC un triangle, AB = 6 cm, AE = 2 cm, BC = 9 cm et (EF)//(BC)



montrer que EF = 3cm

* Solution:
Dans le triangle ABC
On a $\begin{cases} E \in [AB] \\ F \in [AC] \end{cases}$ tel que $(EF) // (BC)$
Alors d'après propo ④: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$
donc $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$
c.à.d $\frac{2}{6} = \frac{EF}{9}$ donc $EF = \frac{2 \times 9}{6} = \frac{18}{6}$
d'où $\boxed{EF = 3\text{ cm}}$

Les exercices

* Exercice 1 page 84:

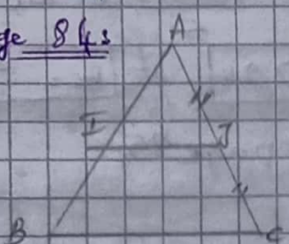
1°) D'après le codage sur la figure, on a I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC]

2°) Dans le triangle ABC
On a $\begin{cases} \text{I milieu de [AB]} \\ \text{J milieu de [AC]} \end{cases}$
donc d'après propo ① (IJ) // (BC)

* Exercice 2 page 84:

Dans le triangle ABC
On a $\begin{cases} \text{I est le milieu de [AB]} \\ \text{J est le milieu de [AC]} \end{cases}$
donc d'après la propo ② on a $IJ = \frac{1}{2} BC$
or BC = 6,2 cm donc $IJ = \frac{1}{2} \times 6{,}2$
$\boxed{IJ = 3{,}1\text{ cm}}$

* Exercice 4 page 84:



1°) Dans le triangle ABC on a
$\begin{cases} * \text{ J milieu de [AC]} \\ * \text{ (IJ) // (BC) et I} \in \text{[AB]} \end{cases}$