

TRIANGLES : MILIEUX ET PARALLÈLES

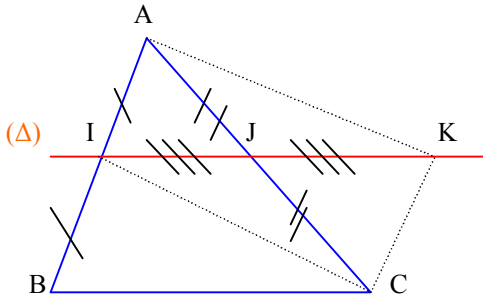
1) Triangles et milieux

a) Théorème des milieux :

Dans un triangle ABC, la droite passant par les milieux I et J des côtés [AB] et [AC], est parallèle au 3^{ème} côté [BC].

De plus : $IJ = \frac{1}{2} BC$

Démonstration :



K est le symétrique de I par rapport à la droite (Δ). Donc [AC] et [IK] ont le même milieu. Donc AKCI est un parallélogramme. Donc (KC) et (AI) sont parallèles.

De plus $KC = AI = IB$.

Donc (KC) et (IB) sont parallèles et $KC = IB$.

Donc KIBC est un parallélogramme.

Donc (IJ) et (BC) sont parallèles.

De plus $IJ = \frac{1}{2} IK = \frac{1}{2} BC$

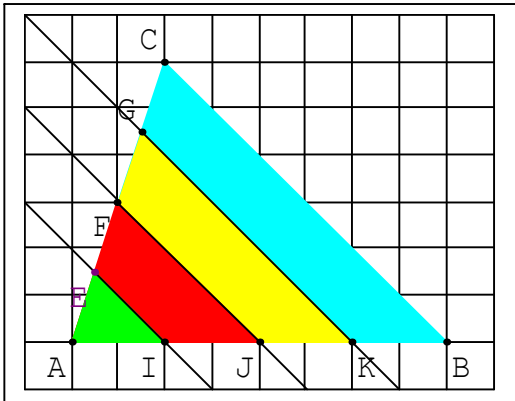
b) Théorème réciproque :

Dans un triangle ABC, la droite passant par le milieu I de [AB], et qui est parallèle à [BC], coupe le 3^{ème} côté [AC] en son milieu J.

Démonstration : (éventuelle).

2) Triangles et parallèles

Activité préparatoire :

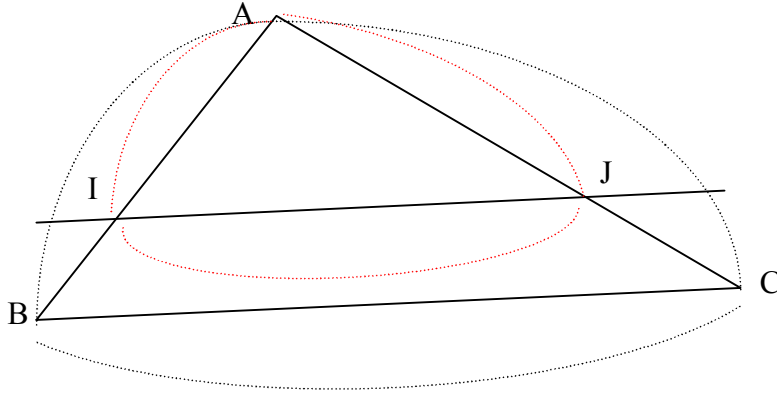


Les droites (EI), (JF) et (KG) sont parallèles à (BC).
 $AI = IJ = JK = KB$.

1. Comparer $\frac{AJ}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{JF}{BC}$.
2. Comparer $\frac{AI}{AJ}$ et $\frac{AE}{AF}$ et $\frac{IE}{FJ}$.
3. Comparer $\frac{AI}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$; et $\frac{IE}{BC}$?
4. Comparer $\frac{AI}{AK}$ et $\frac{AE}{AG}$; et $\frac{IE}{KG}$?
5. Comparer $\frac{AK}{AB}$ et $\frac{AG}{AC}$; et $\frac{KG}{BC}$?

b) Théorème de Thalès :

Dans un triangle ABC, si I est un point du segment [AB] et si J est un point du segment [AC], et si les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, alors on a : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$.



Donc le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs des côtés du triangle AIJ	AI	AJ	IJ

c) Exemple :

ABC est un triangle tel que : $AB = 5,4$; $AC = 6,3$; $BC = 9$. M est le point de [AB] tel que : $AM = 3$. La parallèle à (BC) coupe [AC] en N. Calculer MN et NC. (l'unité est le cm)

M est sur le segment [AB],
N est sur le segment [AC],
(MN) // (BC).

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

$$\text{Donc } \frac{3}{5,4} = \frac{AN}{6,3} = \frac{x}{9}.$$

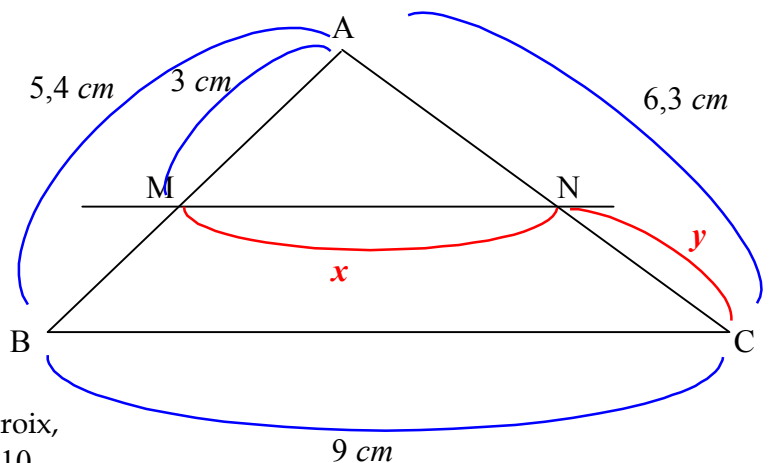
On utilise la règle des produits en croix,

$$3 \times 9 = 5,4 \times x. \text{ D'où } x = \frac{27}{5,4} = \frac{2,7 \times 10}{2,7 \times 2}.$$

Donc $x = 5 \text{ cm}$.

De même, $3 \times 6,3 = 5,4 \times AN$. Donc $AN = \frac{3 \times 6,3}{5,4} = \frac{3 \times 63}{54} = \frac{3 \times 9 \times 7}{2 \times 3 \times 9} = \frac{7}{2}$. Donc $AN = 3,5 \text{ cm}$.

Donc $y = 6,3 - 3,5 = 2,8 \text{ cm}$.



3) Agrandissement et réduction

- a) Définition : Une figure \mathcal{F}' est un agrandissement ou une réduction d'une figure \mathcal{F} si les longueurs de la figure \mathcal{F}' sont proportionnelles aux longueurs de la figure \mathcal{F} .

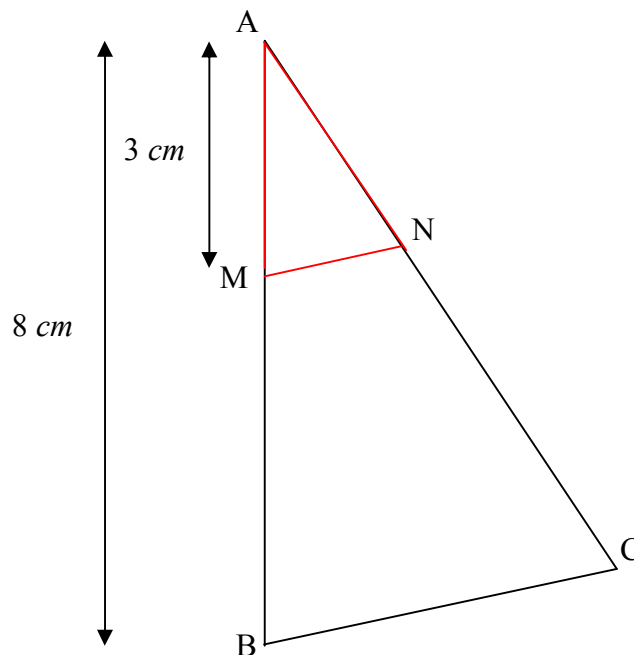
Le coefficient de proportionnalité k de \mathcal{F} vers \mathcal{F}' s'appelle le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Si $k < 1$, on dit que \mathcal{F}' est une réduction de \mathcal{F} .

Si $k > 1$, on dit que \mathcal{F}' est un agrandissement de \mathcal{F} .

- b) Propriété : Dans une réduction ou un agrandissement, les mesures des angles sont conservées.
Dans une réduction ou un agrandissement, le parallélisme est conservé.

- c) Exemple : Dans la figure ci-dessous, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$.



D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Comme $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} < 1$,

le triangle AMN est une réduction du triangle ABC de coefficient $k = \frac{3}{8}$.