PUISSANCES ET PUISSANCES DE 10

1) Puissances de 10

a) Définitions :

Si n est un entier positif quelconque.

$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \text{------} \times 10}_{n \text{ fois}} = \underbrace{100\text{--------}0}_{n \text{ zéros}}.$

Exemple : $10^5 = 100\ 000$.

$10^{-n} = \underbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \text{------} \times \frac{1}{10}}_{n \text{ fois}} = \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0{,}\underbrace{00\text{------}01}_{n \text{ chiffres}}.$

Exemple : $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0{,}000\ 1$.

b) Propriétés :

Si n et p sont des entiers relatifs, on a les formules suivantes :

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\qquad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $\qquad \left(10^n\right)^p = 10^{n\times p}$

Exemples : $10^3 \times 10^{-5} = 10^{3+-5} = 10^{-2} = 0{,}01$ $\qquad \frac{10^2}{10^{-4}} = 10^{2--4} = 10^{2+4} = 10^6 = 1\ 000\ 000.$

$\left(10^3\right)^{-5} = 10^{3\times -5} = 10^{-15}$

c) Ecritures d'un nombre décimal :

Propriété : Tout nombre décimal relatif x peut s'écrire sous la forme $x = a \times 10^n$ où a est un entier relatif et n est un entier relatif.

Exemple : $x = -15{,}08 = -1508 \times 10^{-2} = -15080 \times 10^{-3}$.

d) Ecriture scientifique :

Propriété : Tout nombre décimal positif x peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $\boldsymbol{x = a \times 10^n}$, où a est un nombre positif tel que $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif.

Cette écriture s'appelle ***l'écriture scientifique de x***.

Exemple : L'écriture scientifique de $x = 281{,}05$ est $x = 2{,}8105 \times 10^2$.

Tournez, S.V.P. →

2) Puissances d'un nombre quelconque :

a) Définition : Pour tout entier n ≥ 2 et pour tout nombre relatif non nul a,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times - - - - - \times a}_{n \text{ fois}} \qquad a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times - - - - - \times \frac{1}{a}}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{a^n}$$

Si $n = 1$, on pose par convention $a^1 = a$ et si $n = 0$, on pose par convention $a^0 = 1$.

Exemples : $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ $\quad (-5)^4 = -5 \times -5 \times -5 \times -5 = +625$

$$5^{-2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \qquad (-2)^{-5} = \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{(-2)^5} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

$3^0 = 1$ $\quad (-6)^1 = -6$

b) Propriétés : si a est un nombre relatif et si n est un entier,
si $a \geq 0$ alors, $a^n \geq 0$
si $a < 0$ et n est pair , alors $a^n > 0$ et si $a < 0$ et n est impair, alors $a^n < 0$.

Si a est un nombre positif, alors a^n est positif.
Si a est un nombre négatif et si n est pair, a^n est positif.
Si a est un nombre négatif et si n est impair, a^n est négatif.

Exemples :
A = $5^3 = 5 \times 5 \times 5 =$ **125**. $\quad a = 5$ est positif, donc $5^3 > 0$.
B = $(-3)^4 = +3^4 =$ **81**. $\quad a = -3$ est négatif, donc $\mathbf{(-3)^4 > 0}$ car $n = 4$ est pair.
C = $(-7)^3 = -7^3 =$ **– 343**. $\quad a = -7$ est négatif, donc $\mathbf{(-7)^3 < 0}$ car $n = 3$ est impair.

c) Propriétés : Pour tous nombres a et b non nuls, et pour tous entiers relatifs n et p, on a :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \left(a^n\right)^p = a^{n \times p} \qquad a^n \times b^n = \left(a \times b\right)^n$$

Exemple 1: $5^3 \times 2^3 = (5 \times 2)^3 = \boxed{\mathbf{10^3 = 1000}}$.

Exemple 2: Mettre sous la forme d'une seule puissance
puis calculer sous la forme d'une fraction irréductible

A = $5^3 \times 2^{-3} = 5^3 \times \left(2^{-1}\right)^3 = \left(5 \times 2^{-1}\right)^3$.

$\boxed{A = \left(\frac{5}{2}\right)^3}$. $\qquad \boxed{\textbf{Donc } A = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}}$.

B = $6^3 \times 2^2 \times 15^2 \times 5^{-2}$
B = $(2 \times 3)^3 \times 2^2 \times (3 \times 5)^2 \times 5^{-2}$ *On décompose chaque nombre en produit de nombres simples.*
B = $2^3 \times 3^3 \times 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 5^{-2}$ *On utilise les formules, ici la formule 3, puissance d'un produit.*
B = $2^3 \times 2^2 \times 3^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 5^{-2}$ *On regroupe les puissances d'un même nombre ensemble.*
B = $2^{3+2} \times 3^{3+2} \times 5^{2-2}$ *On utilise les formules, ici la formule 1, puissances d'un même nombre.*
B = $2^5 \times 3^5 \times 5^0$ *On simplifie et on calcule chaque terme.*
B = $(2 \times 3)^5 \times 1$ *On utilise de nouveau la formule sur les puissances d'un produit, mais dans l'autre sens.*

$\boxed{\mathbf{B = 6^5 = 7776}}$.