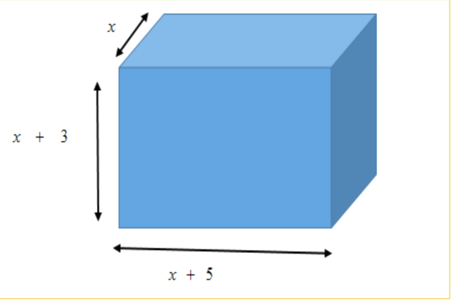
Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Oued Eddahab	COURS **Les polynômes**	Niveau : TCT - BIOF Année : 2017-2018

I. *Activité 1*

Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions x , $x+3$ et $x+5$



avec x réel strictement positif. Soit $V(x)$ le volume de ce parallélépipède

1) **Montrer que** $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$
2) **Calculer** $V(1)$ **et** (2) **.**
3) **Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer** $V(1)$ **et** $V(2)$ **?**

II. *Vocabulaire*

L'exemple $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée fonction polynôme par abus de langage dirons brièvement polynôme de degré 3 on note $d°(V) = 3$.

Les réels 1, 8, 15 , 0 sont appelés coefficients du polynôme $V(x)$.

III. *Définition d'un polynôme*

***a.* Définition: On appelle polynôme de degré n , et on le nomme P(x) une expression littérale en x de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.**
avec $a_n \neq 0$, a_n , a_{n-1} , ... a_2 , a_1 , a_0 sont appelés coefficients du polynôme et a_0 est appelé terme constant .

***b.* Exemple : soit $P(x) = -5x^4 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$**

P(x) est un polynôme de degré 4 on écrit d°(P) =4

Les réels –5 ,0 ,$\sqrt{3}$, 4 , –7 sont les coefficients de P(x) car on peut écrire

$P(x) = -5x^4 + 0x^3 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$

c.Application1

On considère les expressions littérales suivantes $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} - 1$,
$g(x) = -x^5 + 3x^3 + x + 6$, $h(x) = \sqrt{13 - x^2} - 2x$

1) **Calculer $f(2)$, $g(2)$,$h(2)$**
2) **Reconnaitre parmi les expressions celles qui représentent un polynôme en précisant son degré et ses coefficients**

d.Application2

Ecrire le polynôme p(x) dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1,0,0,-3,1

Vocabulaire :

- **un polynôme de 2eme degré écrit en général $P(x) = ax^2 + bx + c$; avec $a \neq 0$**
  On le nomme trinôme : ex : $P(x) = -3x^2 - 6x + 2$
- **un polynôme de 1er degré écrit en général P(x)= $ax + b$; avec $a \neq 0$**

ex : $g(x) = -7x + 1$
ex : $P(x) = 0$ s'appelle polynôme nul

IV. *Egalité de deux polynômes*

Définition:

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exercice

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes définies par $P(x) = ax^3 + (b-2)x^2 + (4-c)x + d$

avec *a ,b, c et d sont des réels , et* $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$

Déterminons a , b , c et d sachant que $P(x) = Q(x)$ pour tout réel x

V. *Opérations sur les polynômes*

a. *Somme et produit de deux polynômes*

La somme de deux polynômes P et Q est aussi un polynôme noté P+Q

$d°(P+Q) \leq \sup(d°(P); d°(Q))$

La différence de deux polynômes P et Q est un polynôme noté P-Q

$d°(P-Q) \leq \sup(d°(P); d°(Q))$

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté P×Q

$d°(P \times Q) = d°(P) + d°(Q)$

b. *Application:*

Calculer (P+Q) (x), (P-Q) (x) et (P×Q) (x) avec :

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x+1$ *et* $Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x-3$

c. *Remarque :*

- *Le polynôme nul est le polynôme dont tous ses coefficients sont nuls.*
- *Le polynôme nul n'admet pas de degré réel.*

VI. *Racine d'un polynôme-factorisation d'un polynôme*

A. Racine d'un polynôme :

Activité3 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x - 2$

1) **Calculer $P(1)$**
2) **Déterminer les réels a et b tels que $P(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$**

On a Dans l'activité $P(1)=0$, On dit que 1 une racine de $P(x)$ ou zéro de $P(x)$

Définition :

On appelle racine d'un Polynômes la valeur a qui annule le Polynômes.
a est une racine de P(x) ssi P(a)=0

Application : Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

a) **Vérifier que 2 et 3 sont deux racines de $P(x)$**
b) **Soit $R(x)$ un polynôme tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-2)(x+3) + R(x)$**
   1) **Quel est la nature de $R(x)$**
   2) **Déterminer $R(x)$**

B. Factorisation d'un polynôme.

Activité : Soit $\propto$ un réel

1) **Prouver que si un polynôme est factorisablé par $x-\propto$ alors $\propto$ est une racine de ce polynôme**
2) **Soit $\propto$ un réel et P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$**
   a. **Factoriser $P(x) - Q(x)$**
   b. **En déduire que si $\propto$ est une racine du polynôme alors il existe un polynôme Q dont on précisera le degré tel que pour tout réel , $P(x) = (x-\propto)Q(x)$.**

La loi du reste

Définition:	*Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x-a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$. On a donc : $r = P(a)$*

Résultat:	*Un polynôme $P(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x-a)$ si le reste de la division de $P(x)$ par $(x-a)$ est nul, c'est-à-dire si la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est nulle ou $P(a) = 0$*

Exercices : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

1) **Montrons que P(x) est divisible par $x + 3$**
2) **Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x + 1$ et $x - 2$**
3) **Vérifier que $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$**

On dit que $P(x)$ est écrite sous forme de produit de binômes

pratiques de factorisation d'un polynôme

1) *Division euclidienne*

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-5x-6 & x+3 \\ \cline{2-2}
-x^3-3x^2 & x^2-x-2 \\ \cline{1-1}
-x^2-5x-6 & \\
x^2+3x & \\ \cline{1-1}
-2x-6 & \\
2x+6 & \\ \cline{1-1}
00 &
\end{array}
$$

On reprend l'exemple (exercice résolu précédent)

On a $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ est divisible par $x + 3$

Cherchons le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 3)Q(x)$

Le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 2$

D'où $P(x) = (x + 3)(x^2 - x - 2)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-x-2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^2+2x & x+1 \\ \cline{1-1}
0+x+2 & \\
-x-2 & \\ \cline{1-1}
00 &
\end{array}
$$

On peut vérifier que $Q(2) = 0$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x - 2$

Factorisons $Q(x)$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

D'où la factorisation de $P(x)$ en produit de binômes $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$