

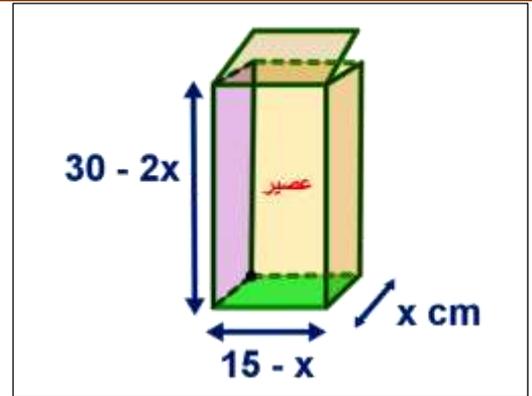


**I. Approche sur les polynômes – égalité de deux polynômes :**

**A. Approche sur les polynômes :**

**a. Activité :**

Une usine de carton décide de construire une boîte de carton de la forme d'un parallélépipède droit pour une usine de jus d'orange dont les dimensions sont :  
pour le hauteur  
et pour sa base  $(15 - x)$  cm de longueur et  $x$  cm de largeur tel que  $0 < x < 15$ . ( voir figure ) .



1. Soit  $V(x)$  le volume de la boîte exprimer en  $x$  vérifier que :  $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$ .
2. Quel est le volume ( exprimée en litre ) de la boîte si on donne à  $x$  les valeurs suivants :  
 $x = 5$  ;  $x = 10$  .

**b. Vocabulaire :**

- L'expression :  $2x^3 - 60x^2 + 450x$  est appelée polynôme de degré 3 .
- On note les polynômes par  $P(x)$  ou  $Q(x)$  ou  $R(x)$  ....
- Pour le degré on note  $d^{\circ}V = 3$
- Les nombres 2 et  $-60$  et 450 sont appelés les coefficients du polynômes

**c. Définition :**

$x$  variable de  $\mathbb{R}$  .  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  .

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$  et  $a_n$  sont des nombres réels donnés avec  $a_n \neq 0$  .

- L'expression :  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$  est appelée polynôme de degré  $n$  ( écrit dans le sens croissant ) .
- L'expression :  $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  est appelée polynôme de degré  $n$  ( écrit dans le sens décroissant ) .
- Chaque terme de cette somme est appelé monôme ( exemple  $a_2x^2$  est un monôme de degré 2 )
- On note un polynôme par :  $P(x)$  ou  $Q(x)$  ou  $R(x)$  .
- Le degré  $n$  du polynôme est noté  $d^{\circ}P = n$
- Les réels  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$  et  $a_n$  sont appelés les coefficients du polynômes
- Si  $P(x) = a_0$  et avec  $a_0 \neq 0$  on a  $\text{deg}(P) = 0$  .
- Si  $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$  alors  $P(x) = 0$  d'où  $P(x)$  n'a pas de degré le polynôme est appelé le polynôme nul .

**d. Cas particulier :**

- $P(x) = ax$  ( avec  $a \neq 0$  ) ce polynôme est appelé monôme de 1<sup>er</sup> degré .
- $P(x) = ax^2$  ( avec  $a \neq 0$  ) ce polynôme est appelé monôme de 2<sup>ième</sup> degré .
- $P(x) = ax + b$  ( avec  $a \neq 0$  ) ce polynôme est appelé binôme de 1<sup>er</sup> degré .
- $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( avec  $a \neq 0$  ) ce polynôme est appelé trinôme de 2<sup>ième</sup> degré .

**B. Egalite de deux polynômes :**



**a. Activité :**

On considère les deux polynômes suivants  $P(x) = 3x^2 - 4x + 7$  et  $Q(x) = ax^3 + (b-2)x^2 + 3cx + d$ .

1. Déterminer a et b et c et d tel que  $Q(x) = P(x)$ .
2. Donner la propriété.

**b. Propriété :**

$P(x)$  et  $Q(x)$  deux polynômes sont égaux si et seulement si  $\deg(P) = \deg(Q)$  et les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

**c. Exercice :**

- $P(x)$  est un trinôme de 2<sup>ème</sup> degré tel que  $3x^2 - 5x + 8$  et  $P(x)$  leur coefficient de deuxième de degré sont égales.
- $P(0) = -1$  et  $P(1) = 0$ .

Déterminer le polynôme  $P(x)$ .

**II. La somme et le produit de deux polynômes :**

**a. Activité :**

Calculer la somme  $P(x) + Q(x)$  pour chaque cas :

- $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$  et  $Q(x) = 4x^2 + 7x - 8$ .
- $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$  et  $Q(x) = -3x^2 + 7x - 8$ .

Calculer le produit  $P(x) \times Q(x)$  pour chaque cas :

- $P(x) = 5x + 1$  et  $Q(x) = 7x - 8$ .
- $P(x) = -5x + 1$  et  $dQ(x) = 5x^2 - 8$ .
- Que peut-on dire pour  $P(x) + Q(x)$  et de  $\deg(P+Q)$ .
- Même question pour  $P(x) \times Q(x)$ .

**b. Propriété :**

- La somme de deux polynôme  $P(x)$  et  $Q(x)$  est un polynôme noté par  $P(x) + Q(x) = (P+Q)(x)$  tel que le degré de  $P(x) + Q(x)$  est inférieur ou égal au degré de chacun d'eux. ( ou  $d^\circ(P+Q) \leq \sup(d^\circ P; d^\circ Q)$  )
- Le produit de deux polynôme  $P(x)$  et  $Q(x)$  est un polynôme noté par  $P(x) \times Q(x) = (P \times Q)(x)$  tel que :  $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$ .

**III. Racine d'un polynôme – division d'un polynôme par le binôme  $x - a$  avec  $a \in \mathbb{R}$  :**

**A. Racine d'un polynôme :**

**a. Activité :**

On considère le polynôme suivant :  $P(x) = x^2 - 5x + 6$ .

1. Calculer  $P(3)$  déterminer les réels a et b tel que :  $P(x) = (x-3)(ax+b)$ .

On considère le polynôme suivant :  $Q(x) = x^3 - 5x + 2$ .



2. Calculer  $Q(2)$  déterminer les réels  $a$  et  $b$  et  $c$  tel que :  $Q(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$  .

**b. Vocabulaire :**

- On a  $P(3) = 0$  on dit que 3 est racine du polynôme  $P(x)$  .( ou 3 est zéro du polynôme  $P(x)$  ) .
- On a  $Q(2) = 0$  on dit que 2 est racine du polynôme  $Q(x)$  .( ou 3 est zéro du polynôme  $Q(x)$  ) .

**c. Définition :**

On dit un réel  $\alpha$  est un racine ( ou zéro ) d'un polynôme  $P(x)$  si et seulement si  $P(\alpha) = 0$  .

**B. division d'un polynôme par le binôme  $x-a$  avec  $a \in \mathbb{R}$  .**

**a. Activité :**

On considère le polynôme suivant :  $P(x) = x^2 - 5$  , on prend  $a = 2$  .

1. Calculer  $P(2)$  .
2. Vérifier que  $x^2 - 5 = (x-2)(x+2) - 1 = (x-2)(x+2) + P(2)$  .
3. Comparer que :  $\frac{x^2 - 5}{x - 2}$  et  $x + 2 - \frac{1}{x - 2}$  .

**b. Vocabulaire :**

Pour l'écriture  $x^2 - 5 = (x-2)(x+2) - 1$

- Le polynôme  $x + 2$  est appelé le quotient de la division euclidienne de  $x^2 - 5$  par  $x - 2$  .
- Le réel  $-1$  ( ou le polynôme  $-1$  ) est appelé le reste de la division euclidienne de  $x^2 - 5$  par  $x - 2$  .

De même :

- Le polynôme  $x - 2$  est appelé le quotient de la division euclidienne de  $x^2 - 5$  par  $x + 2$  .
- Le réel  $-1$  ( ou le polynôme  $-1$  ) est appelé le reste de la division euclidienne de  $x^2 - 5$  par  $x + 2$  .

**c. Définition et propriété :**

Soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) ,  $a$  est un réel ( $a \in \mathbb{R}$ ) .

Le polynôme  $P(x)$  s'écrit de la forme  $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$  avec  $\deg(Q) = n - 1$  .

- Le polynôme  $Q(x)$  le quotient de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - a$  .
- Le réel  $P(a)$  ( ou le polynôme  $P(a)$  ) est appelé le reste de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - a$  .

**d. Cas particulier :**

✓ Si  $P(a) = 0$  (  $a$  est un zéro ou racine du polynôme ) on obtient  $P(x) = (x-a)Q(x)$

dans ce cas on dit :

- Le polynôme  $P(x)$  est divisible par  $x - a$  .
- Le polynôme  $P(x)$  est factorisé par  $x - a$  .

**e. Exercice :**

1. Montrer que : 3 est racine du polynôme  $P(x) = x^2 - 5x + 6$  .
2. Est-ce que  $P(x)$  est divisible par  $x - 2$  .
3. Ecrire le polynôme  $P(x)$  sous la forme de deux polynômes de 1<sup>er</sup> degré .

**C. Méthode pour déterminer le quotient  $Q(x)$  et le reste  $P(a)$  dans la division de  $P(x)$  par  $x - a$  :**

**a. 1<sup>ère</sup> méthode :**



On considère que :  $P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4$  et  $x-2$  .donc  $a = 2$

D'après la propriété on a :  $P(x) = (x-2)Q(x) + P(2)$  avec  $d^\circ(Q) = 2$  et  $P(2) = 32$  .

Donc :  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  .

Par suite :

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^3 - 5x^2 + 4 \\ &= (x-2)Q(x) + P(2) \\ &= (x-2)(ax^2 + bx + c) + 32 \\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c + 32 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} 6 = a \\ -5 = b - 2a \\ 0 = c - 2b \\ 4 = -2c + 32 \end{cases} \text{ par suite on obtient } a = 6 \text{ et } b = 7 \text{ et } c = 14 .$$

Conclusion :  $P(x) = (x-2)(6x^2 + 7x + 14) + 32$

**C.** 2<sup>ème</sup> méthode : la division euclidienne : de  $P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4$  par  $x-2$  .

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 5x^2 + 0x + 4 \\ 6x^3 - 12x^2 \\ \hline 7x^2 + 0x + 4 \\ 7x^2 - 14x \\ \hline 14x + 4 \\ 14x - 28 \\ \hline 32 \end{array}$$

**D.** 3<sup>ème</sup> méthode Schéma de Horner :

**a.** Exemple :

Prenant l'exemple précédent :  $P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4$  et  $x-2$  .donc  $a = 2$  . On utilise le tableau suivant :

	$x^3$	$x^2$	$x$	$x^0$
Coefficient de $P(x) \rightarrow$	6	-5	0	4
	$\downarrow$	$\times 2 \rightarrow 12$	$\times 2 \rightarrow 14$	$\times 2 \rightarrow 28$
Coefficient de $Q(x) \rightarrow$	6	7	14	32
$Q(x)$	$6x^2$	$7x^2$	14	Le reste
$P(x)$	$P(x) = (6x^2 + 7x^2 + 14)(x-2) + 32$			
Même résultat avec la division euclidienne ( 2 <sup>ème</sup> méthode )				