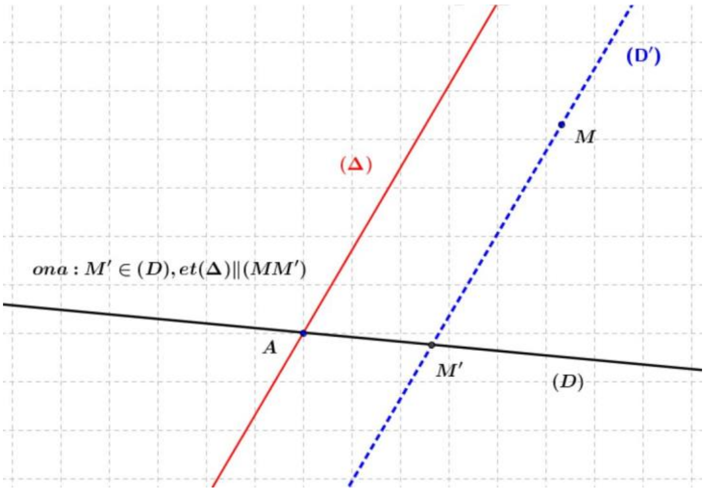
# La projection dans le plan

## I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite




**1)Définition**

Soient $(D)$ et $(\Delta)$ deux droites sécantes en un pont A , et soit M un point du plan
La droite qui passe par M et parallèle a$(\Delta)$ coupe (D) en un point M'
le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à $(\Delta)$ ou le projeté M sur (D) parallèlement a $(\Delta)$ ou l'Image du point M par la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à $(\Delta)$ et on écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ **ou** $P(M) = M'$

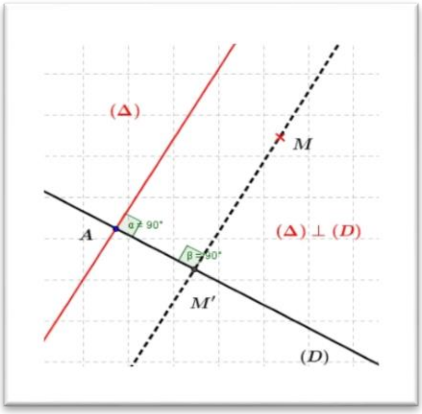
la droite $(\Delta)$ s'appelle la direction de la projection

$P(M) = M'$ **:** $M'$ l'Image du point M par la projection $P$

**si** $B \in (D)$ **alors** $P(B) = B$ on dit alors que le point $B$ **est invariant par** la projection $P$

**2. Propriétés**

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à $(\Delta)$




**Cas particulier**

Si les droite $(D)$ et $(\Delta)$ sont perpendiculaire (on dit aussi orthogonales) on dit que M'est la projection orthogonale de M sur (D)

**Exercice1** : Soit ABC est un triangle et M le milieu de [AB]

1)Soit $P_1$ la projection sur (BC) parallèlement à $(AC)$

Déterminer : $P_1(A)$ ; $P_1(C)$, $P_1(B)$ , $P_1(M)$ ,

2)Soit $P_2$ la projection sur $(AC)$ parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$ ,, $P_2(C)$ $P_2(B)$ , $P_2(M)$

**Réponse** : 1) soit $P_1$ la projection sur (BC) parallèlement à $(AC)$

On a $A \in (AC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc $P_1(A) = C$

On a $B \in (BC)$ donc B est invariante par la projection $P_1$ donc $P_1(B) = B$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection $P_1$ donc $P_1(C) = C$

**Soit** $M' = P_1(M)$ **on a** M le milieu de [AB]

**La** parallèle à $(AC)$ passant par M passe forcément par le milieu de [BC]
donc M' est le milieu de [BC]

1) soit: $P_2$ la projection sur $(AC)$ parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc $P_2(A) = A$

On a $C \in (AC)$ donc C est invariante par la projection $P_2$ donc $P_2(C) = C$

On a $B \in (BC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc $P_2(B) = C$

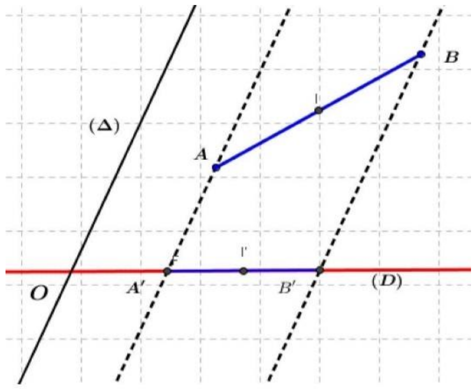
**On a** M le milieu de [AB] donc **la** parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en son milieu soit: $M''$ **ce** milieu donc $P_2(M) = M''$

**3. La projection d'un segment et de son milieu sur une droite parallèlement à une autre droite**

Soi A et B deux points du plan et A' et B' sont respectivement leur projection $P$ sur sur (D) parallèlement à $(\Delta)$

**Propriété 1 :** L'image du segment [AB] par la projection $P$ **est le** segment $[A'B']$ et on écrit : $P([AB]) = [A'B']$

**Propriété 2 :** Si I est le milieu de [AB] alors $P(I) = I'$ **est** le milieu du segment $[A'B']$




On dit que la projection conserve les milieux

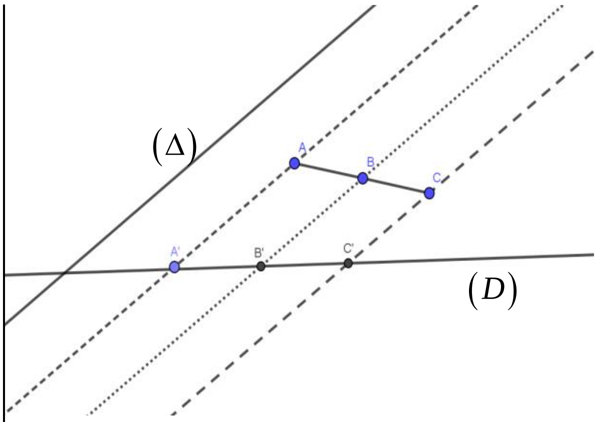
***Remarque :***

on a : $P([AB]) = [A'B']$ donc pour tout point M du segment [AB] : $P(M) = M' \in [A'B']$

## II)Théorème de Thales et son théorème réciproque

### 1)Théorème de Thales :

Soient $(D)$ et $(\Delta)$ deux droites sécantes en un pont , et soient A ; B; C trois points alignés du plan tel que $(AB)$ et $(\Delta)$ ne sont pas parallèles




soient $A'$ ; $B'$;$C'$ respectivement les projetés des points A ; B; C sur$(D)$ parallèlement à $(\Delta)$

Alors : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$

### 2)Théorème de Thales avec les vecteurs :

Soient $A'$ ; $B'$;$C'$ respectivement les projetés des points A ; B ; C sur droite$(D)$ parallèlement à $(\Delta)$

Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

On dit que la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

**Exercice2** : Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1)Construire le point M' le projeté de M sur la droite$(AC)$ parallèlement à $(BC)$

2)Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{MM'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

**Réponse** : 1) soit: $P$ la projection sur$(AC)$ parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc A est invariante par la projection $P$ donc $P(A) = A$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection $P$ donc $P(C) = C$

On a aussi : $P(B) = C$

**Et puisque** $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

$Alors\ :\ \overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

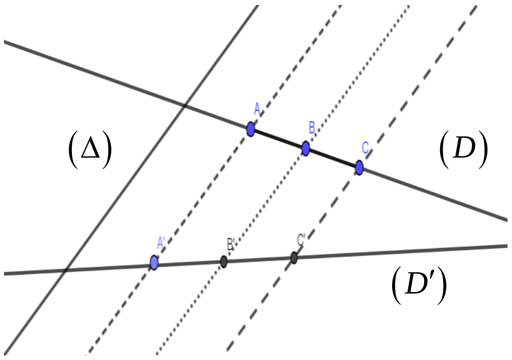
## 3)le théorème réciproque de Thales

Soient $(D)$ et $(D')$ deux droites non parallèles a une troisième $(\Delta)$ , et soient A ; B deux points de la droite $(D)$ tel que $A'$ et $B'$ respectivement les projetés des points A ; B sur $(D')$ parallèlement à $(\Delta)$

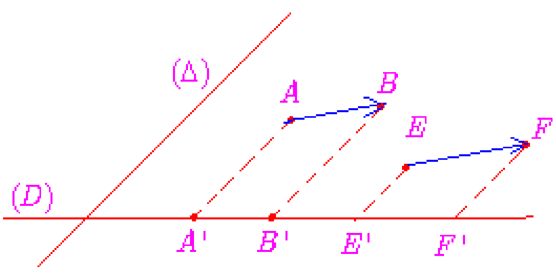
Si C un point de la droite $(D)$ et $C'$ un point de la droite $(D')$ tel que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Et les points A ; B et C sont dans le même ordre sur la droite $(D)$ que les points $A'$; $B'$ et $C'$ sur la droite $(D')$

Alors : le point $C'$ est la projection de C sur la droite $(D')$ parallèlement à $(\Delta)$ et on a $(AA') \| (BB') \| (CC')$




**Propriété :soit** $P = P_{(D;\Delta)}$




**Si :** $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{EF}$ **et** $P(B) = B'$ **;** $P(A) = A'$ **;** $P(E) = E'$ **et** $P(F) = F'$

**Alors :** $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{E'F'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

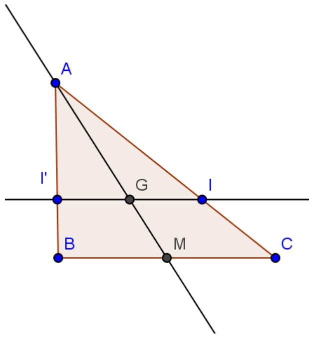
Soient $(\Delta)$ et $(\Delta')$ deux droites sécantes et A ; B; C ; D des points distinctes et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ET si $A'$ ; $B'$;$C'$ et $D'$ respectivement les projetés des points A ; B ; C et $D$ sur la droite $(\Delta)$ parallèlement à $(\Delta')$

Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

**Exercice3** : (réciproque de Thales):

Soient ABC est un triangle et $I$ et $I'$ deux points tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$




1) Montrer que $I'$ **est** par la projection de $I$ sur la droite $(AB)$ parallèlement à $(BC)$

2) soit M est le milieu de [BC] ; la droite $(AM)$ coupe la droite $(II')$ en G

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

**Réponse :** 1) On a $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$

donc $AI = \frac{2}{3}AC$ donc $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\left\|\overrightarrow{AI'}\right\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$ donc

$AI' = \frac{2}{3}AB$ donc $\frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$ ②

D'après ① et ② on a $\frac{AI}{AC} = \frac{AI'}{AB}$ et d'après la réciproque de Thales : $(II') \| (BC)$

Et puisque $(AB)$ coupe $(II')$ en $I'$ donc $I'$ est la projection de $I$ sur la droite $(AB)$ parallèlement à $(BC)$

2) On a $I'$ est la projection de $I$ sur la droite $(AB)$ parallèlement à $(BC)$ et M est le milieu de [BC] Mq : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ ???

On considère $P$ la projection sur $(AM)$

Parallèlement à (BC)

On a $A \in (AM)$ donc A est invariante par la projection $P$ donc $P(A) = A$ ❶

**la** parallèle à (BC) passant par C est (BC) elle coupe $(AM)$ en M donc $P(C) = M$ ❷

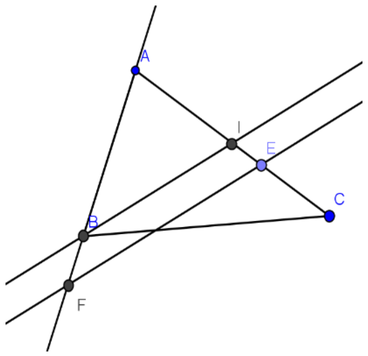
**la** parallèle à (BC) passant par $I$ est $(II')$ elle coupe $(AM)$ en G donc $P(I) = G$ ❸

**Et** on a en plus $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ❹ donc D'après ❶ et ❷ et ❸ et ❹ on a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ car la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

**Exercice4** : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$. $E$ un point de $(AC)$ tel que : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $P_{((AB);(IB))}(E) = F$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

**Solution :**




On a : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ **et** I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ donc **:** $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E) = F$ **et** $P_{((AB);(IB))}(I) = B$ **et** $P_{((AB);(IB))}(A) = A$

Et puisque le la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

**Exercice5** : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$

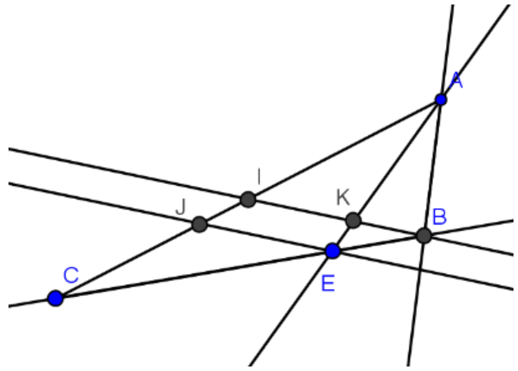
$E$ un point tel que : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par $E$ et parallèle a $(IB)$ coupe $(AC)$ **en** $J$

**1)**montrer que $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

2)si $(IB) \cap (AE) = \{K\}$ montrer que : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

**Solution : 1)**soit $P_{((AC);(IB))}$ la projection sur $(AC)$ parallèlement à $(IB)$




On a : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$ et $P_{((AC);(IB))}(B) = I$ **et** $P_{((AC);(IB))}(E) = J$ **et** $P_{((AC);(IB))}(C) = C$ et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$

La déduction :

On a $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}$ et I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et par suite :

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

**2)** soit $P_{((AE);(IB))}$ la projection sur $(AE)$ parallèlement à $(IB)$

On a : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$ **et** $P_{((AE);(IB))}(A) = A$ et $P_{((AE);(IB))}(I) = K$ **et** $P_{((AE);(IB))}(J) = E$

et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien