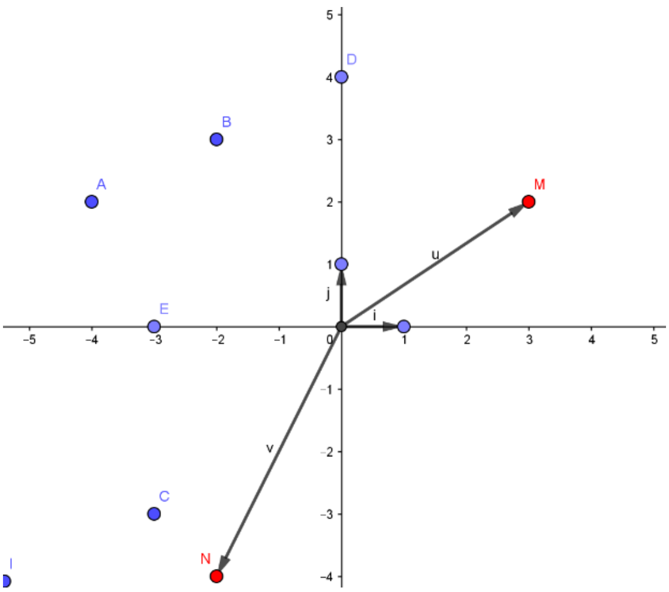
La droite dans le plan

Exercice1 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ Construire les points $A(-4;2)$; $B(-2;3)$; $C(-3;3)$; $E(0;4)$; $F(-3;0)$ et les vecteurs $\vec{u}(3;2)$ $\vec{v}(-2;-4)$

Réponse : soit M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ donc $M(3;2)$ et soit N tel que $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ donc $N(-2;-4)$



Exercice2 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient $A(1;2)$; $B(-5;4)$

1. Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
2. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

Réponse :1) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$

Donc : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1+(-5)}{2};\frac{2+4}{2}\right)$

donc $I(-2;3)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

2) on a $A(1;2)$; $B(-5;4)$; $O(0;0)$

donc $\overrightarrow{OA}(x_A-x_O;y_A-y_O)$ donc $\overrightarrow{OA}(1-0;2-0)$

donc $\overrightarrow{OA}(1;2)$

$\overrightarrow{OB}(x_B-x_O;y_B-y_O)$ donc $\overrightarrow{OB}(-5-0;4-0)$

donc $\overrightarrow{OB}(-5;4)$

on a $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}(1+(-5);2+4)$

donc $\overrightarrow{OC}(-4;6)$ donc $C(-4;6)$

3) on a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

On vérifie : on a $\overrightarrow{OA}(1;2)$ ①

Et $\overrightarrow{BC}(-4+5;6-4)$ c a d $\overrightarrow{BC}(1;2)$ ②

De ① et ② on a donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

4) on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{OA}(1;2)$ et $2\overrightarrow{OB}(-10;8)$

$\overrightarrow{IC}(-4+2;6-3)$ donc $\overrightarrow{IC}(-2;3)$

on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ donc $\vec{u}(1-10+2;1+8+3)$

donc $\vec{u}(-11;13)$

Exercice3 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1;2)$; $B(-3;-1)$ et $C(3;-2)$ et les vecteurs $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(2;4)$

1) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

2) Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB]

3)calculer les distances suivantes : AB et AC et BC

Réponse :1)

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

donc $\overrightarrow{AB}(-3-1;-1-2)$ donc $\overrightarrow{AB}(-4;-3)$

$\overrightarrow{BD}(x_D-x_B;y_D-y_B)$ donc $\overrightarrow{BD}(x_D+3;y_D+1)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D+3=-4\\y_D+1=-3\end{cases}$ donc : $\begin{cases}x_D=-7\\y_D=-4\end{cases}$

2) $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1-3}{2};\frac{2-1}{2}\right)$ donc $I\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

3) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(3+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$

Exercice4 : on considére dans la base $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ les vecteurs
$\vec{u}\left(3,-2\right)$ et $\vec{v}\left(-6,4\right)$

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Solution :

<u>Methode1 :</u>

$$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}3 & -6\\ -2 & 4\end{vmatrix}=3\times 4-\left(-6\right)\times\left(-2\right)=12-12=0$$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

<u>Methode2</u> **:** $\vec{u}\left(3,-2\right)$ donc : $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$

$\vec{v}\left(-6,4\right)$ donc : $\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}$

On remarque que **:** $\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}=-2\left(3\vec{i}-2\vec{j}\right)=-2\vec{u}$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exercice5 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et Soient les points $A\left(\frac{1}{2};3\right)$; $B\left(-2;-2\right)$ et $C\left(1;4\right)$ et le vecteur $\vec{u}\left(1;3\right)$

1)déterminer le réel x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}\left(x-2,5\right)$ soient colinéaires

2)montrer que les points A ; B et C sont alignés

solution : $\vec{u}$ et $\vec{v}\left(x-2,5\right)$ sont colinéaires

ssi $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ ssi $\begin{vmatrix}1 & x-2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=0$ ssi $5\times 1-3\left(x-2\right)=0$

ssi $5-3x+6=0$ ssi $x=\dfrac{11}{3}$

2) $\overrightarrow{AB}\left(-2-\frac{1}{2};-2-3\right)$ cad $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2};-5\right)$

$\overrightarrow{AC}\left(1-\frac{1}{2};4-3\right)$ cad $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2};1\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -5 & 1\end{vmatrix}=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0$$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Par suite les A ; B et C sont alignés

Exercice6 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}\left(3;2m+1\right)$ et $\vec{v}\left(2;m\right)$

2) $\vec{u}\left(m;1\right)$ et $\vec{v}\left(1;m\right)$

Réponse :1) on a :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2m+1 & m\end{vmatrix}=3\times m-2\left(2m+1\right)=3m-4m-2=-m-2$$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ ssi $-m-2=0$ ssi $m=-2$

Si $m=-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

2) on a :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m^2-1=m^2-1^2=\left(m+1\right)\left(m-1\right)$$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ ssi $\left(m+1\right)\left(m-1\right)=0$ ssi

$m=-1$ ou $m=-1$

Si $m=1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m=-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq 1$ et $m\neq-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Exercice7 : donner une représentation paramétrique de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ qui passe par $A\left(3;-5\right)$ et $\vec{u}\left(-2;3\right)$ un vecteur directeur

Solution : une représentation paramétrique de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ est : $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-5+3t\end{cases};\left(t\in\mathbb{R}\right)$

Exercice8 : Soient A(1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1)Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2)Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non a la droite (AB) : $C\left(0;2\right)$; $D\left(-1;1\right)$; $E\left(9;6\right)$

Réponse :1) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), ses composantes sont : $\overrightarrow{AB}$ (-4, -2)

La représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système :

$$(1)\begin{cases}x=-4t+1\\ y=-2t+2\end{cases}\text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

2)on a $C\left(0;2\right)$ on remplace les coordonnées de C dans le système (1)

Donc $\begin{cases}0=-4t+1\\ 2=-2t+2\end{cases}$ on trouve $\begin{cases}t=\frac{1}{4}\\ t=0\end{cases}$ or $\frac{1}{4}\neq 0$

don $C\notin\left(AB\right)$

on a $D\left(-1;1\right)$ on remplace les coordonnées de D dans le système (1)

Donc $\begin{cases} -1=-4t+1 \\ 1=-2t+2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$

donc $D \in (AB)$

on a $E(9;6)$ on remplace les coordonnées de E dans le système ①

Donc $\begin{cases} 9=-4t+1 \\ 6=-2t+2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \end{cases}$

donc $E \in (AB)$

Exercice9 : Donner un point et un vecteur directeur de la la droite D de représentation paramétrique

$\begin{cases} x=7t-1 \\ y=-4t+11 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Réponse : on a $A(-1;11) \in D$ et $\vec{u}(7;-4)$ est un vecteur directeur de la la droite D

Exercice10 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(-2,1)$; $B(3,7)$

1)Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) déterminer les points d'intersections de la droite (AB). Avec les axes du repère

solution : 1) $\overrightarrow{AB}(3+2;7-1)$ cad $\overrightarrow{AB}(5;6)$

la droite (AB) passe par $A(-2,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(5;6)$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $(AB)\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1+6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

2)a) d'intersections de la droite (AB) avec l'axe des abscisses : $\Leftrightarrow y=6t+1=0$

Donc $t=-\frac{1}{6}$ donc $x=-\frac{17}{6}$ par suite le point d'intersections est : $C\left(-\frac{17}{6},0\right)$

b) d'intersections de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées : $\Leftrightarrow x=5t-2=0$ Donc $t=\frac{2}{5}$

par suite le point d'intersections est : $D\left(0,\frac{17}{5}\right)$

Exercice11 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les point A(2 ; 4) et B(5 ; -1)

Réponse : methode1 :

Soit M un point de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-2;y-4)$ et $\overrightarrow{AB}(3;-5)$ sont colinéaires si, et seulement si $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -5 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à :

-5(x - 2) - 3(y -4) = 0

équivaut à : $-5x+10-3y+12=0$

Équivaut à : **3 x + y —2 = 0**

Une équation cartésienne de la droite (D), est :

(D) : $-5x-3y+22=0$

Methode2 : (D) : $ax+by+c=0$

$\overrightarrow{AB}(3,-5)$ un vecteur directeur de (D)

$\overrightarrow{AB}(-b,a)$ donc : $a=-5$ et $b=-3$

Donc l'équation devient : (D) $-5x-3y+c=0$

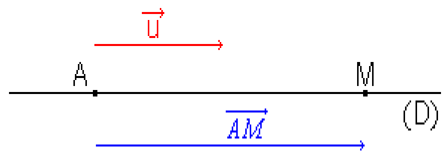
Or on sait que : $A \in (AB)$

Donc : $-5\times2-3\times4+c=0$ donc $c=22$

Par suite : (D) $-5x-3y+22=0$:

Exercice12 : Déterminer une équation cartésienne de la droite D) passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$

Réponse :



Soit M un point de d de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$ et $\vec{u}(-1;3)$ sont colinéaires si, et seulement si $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

Équivaut à : (x - 1)(**3**) - (y + 1)(**-1**) = 0

Équivaut à :3 x — 3+y + l = 0 équivaut à : **3 x + y —2 = 0**

Une équation cartésienne de la droite (D), est :

(D) : **3 x + y —2 = 0**

Exercice13 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Réponse : Les points A et B appartiennent à la droite (D), donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

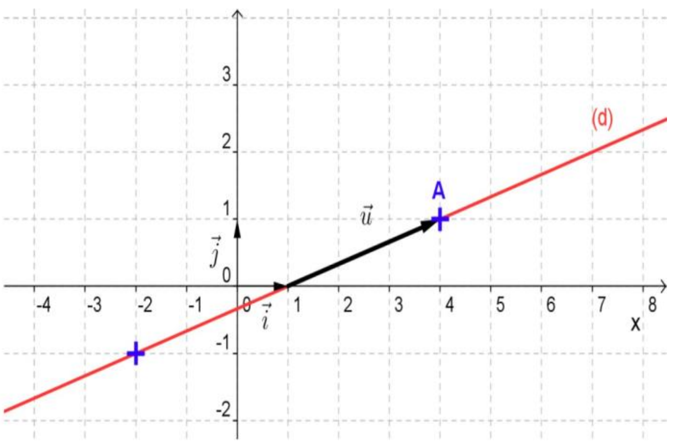
On a $\overrightarrow{AB}(10-5;23-13)$ donc $\overrightarrow{AB}(5;10)$ en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}(1;2)$ est vecteur directeur aussi de la droite (D),

Donc b = 1 et a = -2 Une équation cartésienne de la droite d est donc :de la forme : — 2 x + y + c = 0 Comme le point A (**5** ; **13**) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation : —2x5 + 1 3 + c = 0

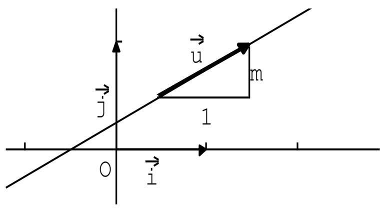
Donc - 10+ 13 + c = 0 D'où : c = - 3
Une équation cartésienne de la droite (D), est donc :

(D) : **-2 x + y - 3 = 0**

Exercice14 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique
Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), , tracée ci-dessous



Réponse :
<u>Méthode 1 :</u> Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D),
On lit graphiquement $\vec{u}(3;1)$ Donc a =1 et b = -3
Une équation cartésienne de la droite d est de la forme :
x - 3y + c = 0 Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation :
$4 - 3 + c = 0 \quad c = -1$
Une équation cartésienne de la droite d est : **x -3** y - **1 = 0**
Méthode 2 : On prend deux points de la droite, par exemple A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode
Remarque :
• si *m est* le coefficient directeur de la droite alors un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1;m)$



• si $\vec{u}(-b;a)$ *est* un vecteur directeur de la droite (D) et $b \neq 0$ alors $m=-\frac{a}{b}$ est un coefficient directeur de la droite

Exercice15 : Soit (D) la droite d'équation cartésienne :

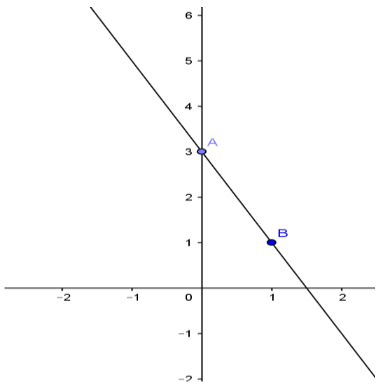
4x + 2 y + 3 = 0

Déterminer l'équation réduite de la droite(D) et son

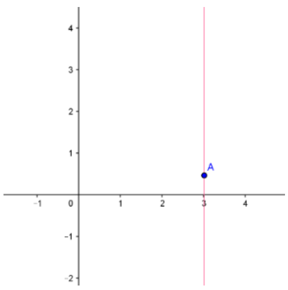
coefficient directeur et un vecteur directeur
Réponse :
• son équation réduite est: y = -2x-3
• *-2 est* le coefficient directeur de la droite (D)
• Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(-2;4)$ ou $\vec{u}(1;-2)$

Exercice16 : Représenter graphiquemt les droites suivantes :
1) (D_1) $2x + y - 3 = 0$ 2) (D_2) : $x = 3$
3) (D_2) : $y = 2$
Réponse :1)

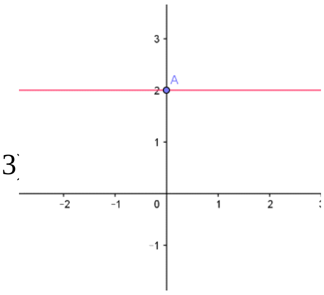
x	0	1
y	3	1



2)



3)



Exercice17 : Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :
1) (D) $\boldsymbol{2x-4y+3=0}$ (D') **:** $\boldsymbol{-x+2y+5=0}$
2) (D) $\boldsymbol{2x+5y-2=0}$ (D') **:** $\boldsymbol{x+3y-2=0}$
Réponse :1) on a : (D) $\boldsymbol{2x-4y+3=0}$ donc $\vec{u}(4;2)$ est un vecteur directeur de (D)
Et on a : (D') **:** $\boldsymbol{-x+2y+5=0}$ donc $\vec{v}(-2;-1)$ est un vecteur directeur de (D')
$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4+4=0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles
Soit $A(x;y)\in(D)$ on prend $x=0$ Alors $\boldsymbol{0-4y+3=0}$ donc $y=\frac{3}{4}$ donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D)$
On vérifie si $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D')$?
on a : $-0+2\times\frac{3}{4}+5=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\neq 0$ donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\notin(D')$ D'où : $(D)\parallel(D')$ strictement

2) on a : (D) **$2x + 5y - 2 = 0$** donc $\vec{u}(-5;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **: $x + 3y - 2 = 0$** donc $\vec{v}(-3;1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5+6 = 1 \neq 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc (D) et (D') sont sécantes

On détermine le point d'intersection de (D) et (D')

Soit $E(x;y)$ ce point d'intersection de (D) et (D')

Alors $(x;y)$ vérifie le système : $\begin{cases} 2x+5y-2=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2x+5y=2 \\ x+3y=2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2x+5y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2(2-3y)+5y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$ donc $\begin{cases} 4-6y+5y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$

donc $\begin{cases} 4-y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=2 \\ x=2-3y \end{cases}$

donc $\begin{cases} y=2 \\ x=-4 \end{cases}$ donc $E(-4;2)$

Exercice18 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D_1): 6x+3y+2=0$ et $(D_2): 3x-2y-1=0$

1)montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

3) étudier la position relative des droites (AB) et (D_1)

4)Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) Qui passe par le point $C(1,2)$ et parallèle a (D_2)

Solutions :

1) $(6)\times(-2)-3\times3=-12-9=-21\neq0$

Donc : (D_1) et (D_2) se coupent

Le point d'intersection vérifie le système :

$\begin{cases} 6x+3y+2=0 \\ 3x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y=-2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$ Donc solution unique :

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\dfrac{1}{21}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{12}{-21} = -\dfrac{4}{7}$

Donc : le point d'intersection est $H\left(-\dfrac{1}{21};-\dfrac{4}{7}\right)$

2)la droite (AB) a une équation de la forme : $(AB): ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

Donc : $a=-4$ et $b=-2$

L'équation devient : $-4x-2y+c=0$

On a : $A\in(AB)$ donc : $-4-4+c=0$ cad $c=8$

Donc : (AB) $-4x-2y+8=0$

Ou : (AB) : $2x+y-4=0$

3)on a (AB) : $2x+y-4=0$ et $(D_1): 6x+3y+2=0$

Et on a : $(6)\times(1)-3\times2=6-6=0$

Donc : (D_1) et (AB) sont parallèles

4) (Δ) est parallèles (D_2) donc le vecteur directeur de (D_2) Est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur (Δ) qui passe par $C(1,2)$

Donc : (Δ) : $\begin{cases} x=1+2t \\ x=2+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

Exercice19: Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D): 3x-5y+6=0$ et $(D'): x-y=0$

1)Donner une représentation paramétrique des droites (D) Et (D')

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) Qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC) avec $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3)déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) et les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D')

4)montrer que J est le milieu de $[IB]$

Solution : 1)a)un vecteur directeur de $(D): 3x-5y+6=0$

Est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}(5,3)$

Déterminons un point de (D) ?

Si $x=0$ alors : $(D): 3\times 0-5y+6=0$ donc $y=\frac{6}{5}$

Donc : une représentation paramétrique des droites (D) est $(D)\begin{cases} x=0+5t \\ y=\frac{6}{5}+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

b)un vecteur directeur de $(D'): x-y=0$

Est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}'(1,1)$

Déterminons un point de (D') ?

Si $x=0$ alors : $(D'): 0-y=0$ donc $y=0$

Donc : une représentation paramétrique des droites (D') est $(D')\begin{cases} x=0+1k \\ y=0+1k \end{cases} (k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC)

Donc : $\overrightarrow{EC}$ un vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{EC}(1;-3)$

Et on sait que: $\vec{u}(-b;a)$ donc: Donc : $a=-1$ et $b=-3$

Donc : $-3x-y+c=0$

Et on sait que (Δ) passe par $B(1;0)$ on trouve $c=3$

Donc : (Δ) $-3x-y+3=0$

3)a)déterminons les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) ?

On va résoudre le système $\begin{cases} 3x-5y=-6 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

On fait la somme des deux équations membre a membre on trouve : $-6y=-9 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :

$-3x-\frac{3}{2}+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc le point d'intersection I de (Δ) et (D) est $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

b)déterminons les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D') ?

On va résoudre le système $\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :

$-3x-x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Donc le point d'intersection J de (Δ) et (D') est $J\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

4)montrons que J est le milieu de $[IB]$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$?

On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$

Donc : J est le milieu de $[IB]$

<u>Exercice20:</u> soient A ; B ; C trois points du plan et E et F deux points tel que :

$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

1)Montrer que les points C ; E ; F sont alignés

2)déterminer les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repére $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

3) montrer par une autre méthode que les points C ; E ; F sont alignés

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ (1)

D'autre part on a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $\overrightarrow{CE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$

Donc : les points C ; E ; F sont alignés

2)on considérant le repère : $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ on a $C(0;0)$

On a $\overrightarrow{CA}=1\overrightarrow{CA}+0\overrightarrow{CB}$ donc $A(1;0)$

On a $\overrightarrow{CB}=01\overrightarrow{CA}+1\overrightarrow{CB}$ donc $B(0;1)$

On a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ par suite : $F\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$$

$$\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ par suite : $E\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

3) montrons par une autre méthode que les points C ; E ; F sont alignés ?

Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires

$$\det\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{4}\end{vmatrix}=-\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=0$$

donc: $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires par suite les points C ; E ; F sont alignés

C’est en forgeant que l’on devient forgeron » Dit un proverbe.

C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l’on devient un mathématicien

http://xriadiat.e-monsite.com