Calcul vectoriel dans le plan

I) Vecteurs du plan

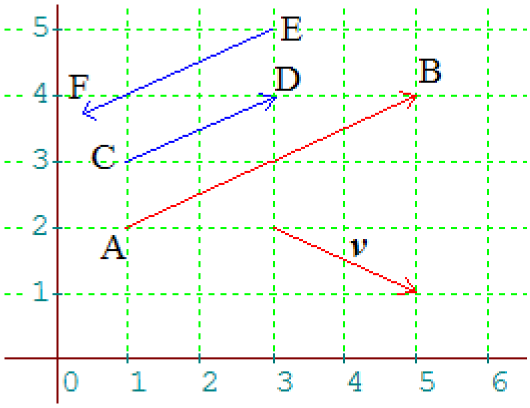
Le concept de vecteur remonte à des temps très anciens et fut introduit par les physiciens.

1)Notion élémentaire de vecteur :

Soient A et B deux points du plan (P)

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

- une *direction* : celle d'une droite (AB)
- un *sens* de parcours (dans la direction de la droite);
- une *norme* (ou *longueur*) et on note : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$



EXEMPLES

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ ont même direction
- $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{EF}$ sont de *sens contraire*.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ n'ont pas la même direction

2)Notation, opposé d'un vecteur, vecteur nul :

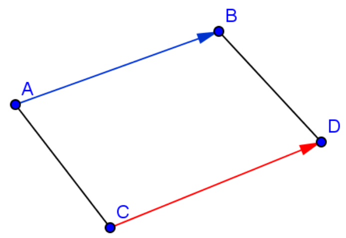
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a la même direction que Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ mais est de sens contraire.
On écrira d'ailleurs, comme pour des nombres relatifs : = - : c'est *l'opposé* de .
et on écrit : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

On peut concevoir un vecteur dont l'origine est confondue avec son extrémité : on parle alors du *vecteur nul*. On note $\vec{0}$ le vecteur nul

Ainsi : pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

II) L'égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme



Remarque :

- Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}=...$, on note ce vecteur $\vec{u}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants du même vecteur $\vec{u}$.
- $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ si et seulement si $A=B$.

Propriété1 : Soients A ; B; C ; D des points du plan (P) telque $A\neq B$ et $C\neq D$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ SSI ABDC est un parallélogramme

Attention : il s'agit du parallélogramme AB***DC*** et non AB***CD***

Propriété2 : Soients A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ SSI $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

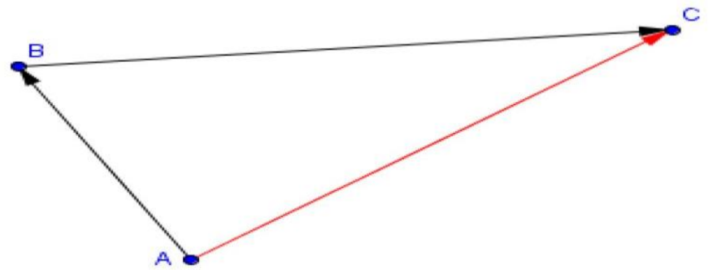
Propriété3 : Etant donné un point A et un vecteur $\bar{u}$

il existe un point M unique tel que $\overline{AM}=\bar{u}$.

III) Somme de deux vecteurs

1) Propriété : Relation de Chasles : (admise)

Soit A, B, C trois points du plan. On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$



Remarque :

Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

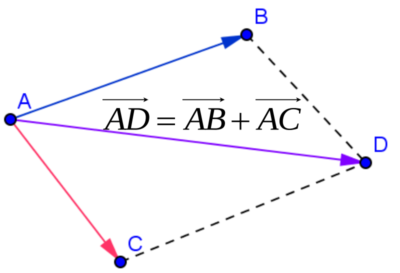
- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles (« factorisation »).
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles (« développement »).

2) Règle du parallélogramme :

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A un point du plan

il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme



Application1 :

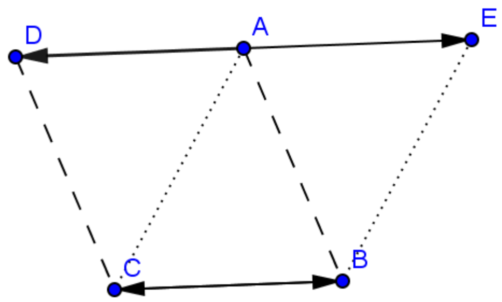
Soit A, B, C trois points du plan non alignés

On considère D et E du plan tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Faire un schéma

Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre réponse

Réponse : 1) on a : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$



2) on a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EA}$

donc le quadrilatère EACB est un parallélogramme

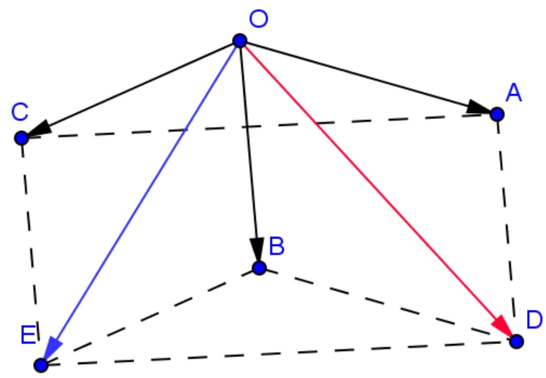
Application2 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et A, B, C, D, O , E des points du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{OE}=\vec{v}+\vec{w}$

1)Faire une figure

2)Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$ donc ① $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB}$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$ donc ② $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OB}$

D'après ① et ② on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$

Donc : ACEB est un parallélogramme

Remarque :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la somme de $\vec{u}$ et $\left(-\vec{v}\right)$

on écrit : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

Application2 :

Soit ABCD est un parallélogramme on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

écrire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Réponse : ABCD est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{j}-\vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\vec{j}-\vec{i}$

on a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}$ Donc : $\overrightarrow{BD}=\vec{j}-2\vec{i}$

IV) La multiplication d'un vecteur par un réel

1. Définition

Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un nombre k, on appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k le vecteur $k\bullet\vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes:

-Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, si k=0 alors $k\bullet\vec{u}=0\bullet\vec{u}=\vec{0}$

si k>0 alors $k\bullet\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens et $\left\|k\bullet\vec{u}\right\|=k\times\left\|\vec{u}\right\|$

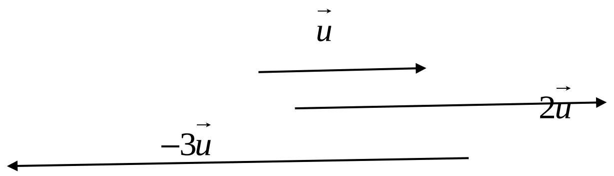
si k<0 alors $k\bullet\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sens contraire et $\left\|k\bullet\vec{u}\right\|=-k\times\left\|\vec{u}\right\|$

-Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $k\bullet\vec{u}=k\bullet\vec{0}=\vec{0}$

-Cas particuliers: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

-Si $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$ alors k=0 ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples :



Application1 :

Soit A, B, C trois points du plan non alignés

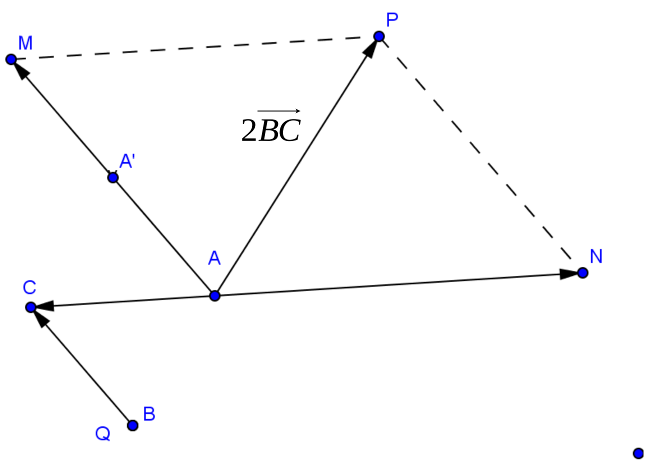
On considère M , N , P et Q du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP}$

et $\overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}$

1)Faire une figure

2)En déduire que : $2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AP}$ et $B = Q$

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = 2\overrightarrow{BA}$

Donc $2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AP}$

Et on a : $\overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AQ}$

Donc $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}$

Donc $B = Q$

2. Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b dans $\mathbb{R}$

$a\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = a\vec{u} + a\vec{v}$

$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

$a\left(b\vec{u}\right) = (a \times b)\vec{u}$ et $1\vec{u} = \vec{u}$

Conséquences

$a\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=a\vec{u}-a\vec{v}$

$\left(a-b\right)\vec{u}=a\vec{u}-b\vec{u}$

Application 1: soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$ et $\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

Réponse:

$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$

$=2\vec{u}+2\vec{v}-4\times\frac{1}{2}\vec{u}+4\vec{v}$

$=2\vec{u}+2\vec{v}-2\vec{u}+4\vec{v}=6\vec{u}+\vec{0}=6\vec{u}$

$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

$=\vec{u}-3\vec{v}+\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{u}$

$=2\vec{u}+\vec{0}-2\vec{u}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Application 2: soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que :

$\vec{u}=2\vec{i}+3\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)-4\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$ et $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$

1)Simplifier l'écriture de $\vec{u}$

2)écrire l'écriture les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Réponse:

1)On a : $\vec{u}=2\vec{i}+3\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)-4\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{i}+3\vec{i}+6\vec{j}-8\vec{i}-4\vec{j}=-3\vec{i}+2\vec{j}$

2) On a : 1 $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ et 2 $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$

Donc $2\vec{v}=4\vec{i}+2\vec{j}$

Alors : $2\vec{v}-\vec{u}=4\vec{i}+2\vec{j}-\left(-3\vec{i}+2\vec{j}\right)=4\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{i}-2\vec{j}$

Donc $2\vec{v}-\vec{u}=7\vec{i}$ d'où $\vec{i}=\frac{2}{7}\vec{v}-\frac{1}{7}\vec{u}$

D'après : 2 On a : $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$ Donc $\vec{j}=\vec{v}-2\vec{i}$

Donc $\vec{j}=\vec{v}-2\left(\frac{2}{7}\vec{v}-\frac{1}{7}\vec{u}\right)=\vec{v}-\frac{4}{7}\vec{v}+\frac{2}{7}\vec{u}=\frac{2}{7}\vec{u}+\frac{3}{7}\vec{v}$

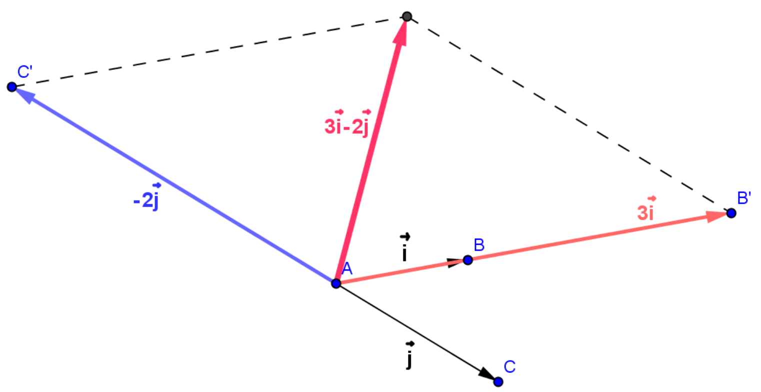
d'où $\vec{j}=\frac{2}{7}\vec{u}+\frac{3}{7}\vec{v}$

Application3 :

Soit ABC est un triangle on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

construire le vecteur $3\vec{i}-2\vec{j}$

Réponse :



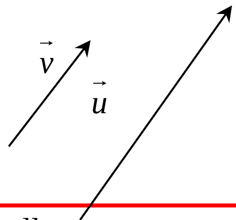
V)La colinéarité de deux vecteurs

1.Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k\in\mathbb{R}$ telle que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Remarque :

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.



2. Propriété (admise)

1) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

2) Soit (AB) une droite. Alors $M\in(D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

3) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Parallèlisme :

Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles il suffit de prouver qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

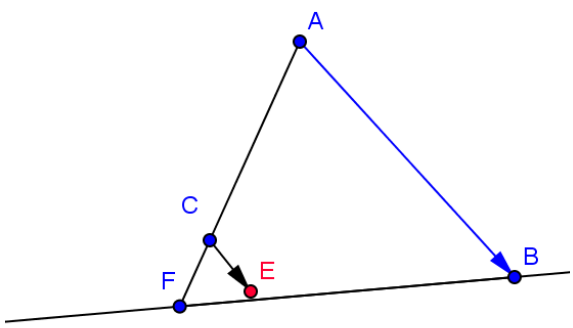
Application 1: soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

1)Faire une figure

2)montrer que : Les points E , F et B sont alignés

Réponse : 1)



2) On a : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{CE}$

donc $\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{EC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=4\left(\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

Or on a : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ c a d $\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Alors : $\overrightarrow{BF}=4\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}\right)$ donc $\overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{EF}$

Donc $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

D'où Les points E , F et B sont alignés

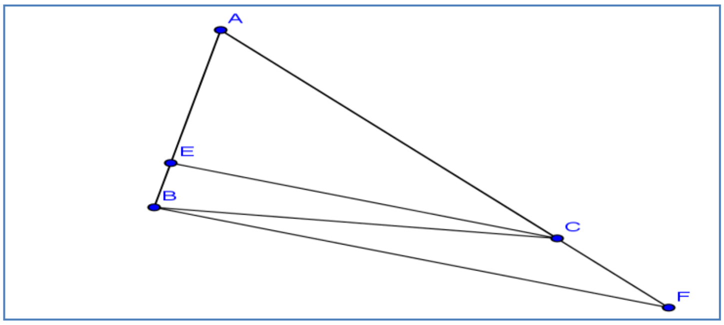
Application 2: soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1)Faire une figure

2)écrire les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) montrer que deux droites (EC) et (BF) sont parallèles

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

et on a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ donc $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3) on a : $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

D'où les droites (EC) et (BF) sont parallèles

VI) Milieu d'un segment

Propriété1 : Soient A, B et I trois points du plan.
Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est le milieu du segment [AB].

2) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

3) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

4) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Propriété2 : Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] ssi pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration : supposant que I est le milieu du segment [AB] donc :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MB}$

$=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}=2\overrightarrow{MI}$

supposant que pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

on prend :M=I donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{II}=\vec{0}$

D'où I est le milieu du segment [AB]

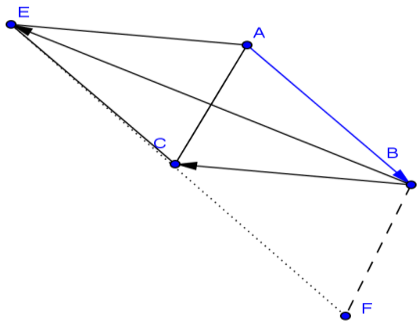
Application 1: soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

1)Faire une figure

2)montrer que : C est le milieu du segment [EF]

Réponse : 1)



2) On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ donc 1 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}$

Et on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc 2 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

D'où I est le milieu du segment [EF]