

TRIGONOMÉTRIE₂

Leçon : les équations et inéquations trigonométriques
Présentation globale

I) les équations trigonométriques élémentaires

II) les inéquations trigonométriques élémentaires

I) les équations trigonométriques élémentaires1) Equation: $\cos x = a$ Propriété: Soit a un nombre réel.Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'admet pas de solution dans \mathbb{R} et on a : $S = \emptyset$.Si $a = -1$ alors on a l'équation $\cos x = -1$ On sait que : $\cos \pi = -1$ donc tous les réels de la forme : $\pi + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solution de l'équation dans \mathbb{R} et on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.Si $a = 1$ alors on a l'équation $\cos x = 1$:On sait que : $\cos 0 = 1$ donc tous les réels de la forme : $0 + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solution de l'équation dans \mathbb{R} et on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\cos x = a$:Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans $]0; \pi]$ tel que $\cos x = \cos \alpha$ et alors on a : $S = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.**Exemple :** Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

Correction: a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

Donc les solutions de l'équation dans \mathbb{R} sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ ssi $\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ ssi $\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$ ssi $\cos x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$

Donc les solutions de l'équation dans \mathbb{R} sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1) Equation: $\sin x = a$

Propriété: Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet pas de solution dans \mathbb{R} et on a : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Si $a = -1$ alors on a l'équation $\sin x = -1$ On sait

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ donc les solutions dans \mathbb{R} de

l'équation sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

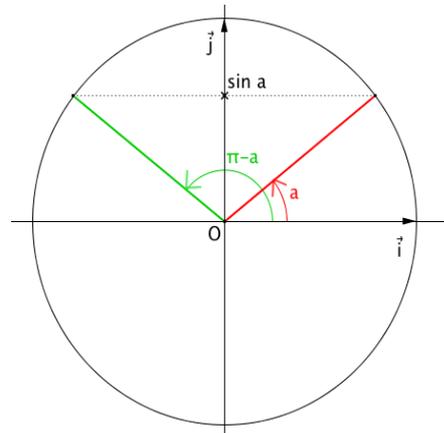
Si $a = 1$ alors on a l'équation : $\sin x = 1$ On sait

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donc on a : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\sin x = a$:

Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = \sin \alpha$ et alors on

a : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.



que :

que :

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ c) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

Correction: a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l'équation dans \mathbb{R} sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x = -\sin \frac{\pi}{6}$ ssi $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans \mathbb{R} sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

c)

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \text{ ou } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Étape 1 : utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de

retrouver une valeur dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses

on peut dire que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ par

exemple.

Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U = \cos V$ "

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{6}$ On applique

alors la propriété

Donc on a : $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité, j'obtiens :

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec k et k' dans \mathbf{Z}

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$

● Étape 3

Mais il ne va falloir garder que les valeurs de x dans l'intervalle imposé c'est à dire dans $]-\pi, \pi]$ on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs à k

Pour la première série de valeurs : $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ avec k dans \mathbf{Z}

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons : on obtient $x = \frac{\pi}{12} - 2\pi$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = -1$: on obtient $x = \frac{\pi}{12} - \pi$; cette valeur appartient à $]-\pi, \pi]$.

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de k telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k = -1$ $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 0$ $x_2 = \frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 1$ $x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

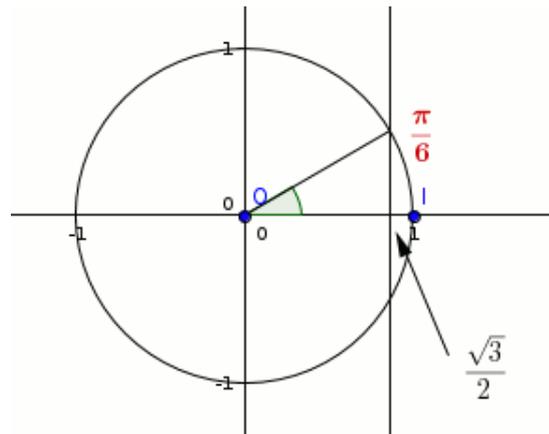
Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)
Faisons de même pour la deuxième série de valeurs

$x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec k' dans \mathbf{Z}

pour $k' = -1$ $x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 0$ $x_3 = -\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 1$ $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$ convient pas car appartient à $]-\pi, \pi]$



pour $k'=2$ $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

Donc L'ensemble solution de l'équation dans $]-\pi, \pi]$ est donc: $S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12} \right\}$

3) Equation : $\tan x = a$

Propriété : Soit a un nombre réel.

L'équation $\tan x = a$ est définie dans \mathbb{R} ssi $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ avec k un nombre relatif

Donc $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Dans D il existe un unique réel : α dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan x = \tan \alpha$ et alors on a :

$$S_{\mathbb{R}} = \{ \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z} \} .$$

EXERCICE

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équations suivantes : $4 \tan x + 4 = 0$

2) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$ l'équations suivantes : $2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$

Correction: 1) on a $4 \tan x + 4 = 0$ est définie dans \mathbb{R} ssi $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ avec k un

nombre relatif Donc $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$4 \tan x + 4 = 0 \text{ ssi } \tan x = -1 \text{ ssi } \tan x = -\tan \frac{\pi}{4} \text{ ssi } \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

Donc les solutions de l'équation dans \mathbb{R} sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$2) 2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \text{ ssi } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ssi } \sin x = -\sin \frac{\pi}{4}$$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$: $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \quad \text{Donc } -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{11}{8} \quad \text{Donc } -0,12 \leq k \leq 1,37 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $k=0$ ou $k=1$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 0\pi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Pour } k=1 \text{ on trouve } x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1\pi = \frac{7\pi}{4}$$

• Encadrement de $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$: $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \quad \text{Donc } -\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{4}$$

Donc $-\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{5}{8}$ Donc $-0,8 \leq k \leq 0,6$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$

Pour $k=0$ on trouve $x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2 \times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$

Donc $S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$

EXERCICE

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équations suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équations suivantes : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ l'équations suivantes : $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

Correction: 1) on a $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi $2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Ssi $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ssi $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) on a $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ssi $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

ssi $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$: $0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1$ Donc $-\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36}$ Donc $-0,29 \leq k \leq 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

• Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ $0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1$ Donc $-\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24}$ Donc $-0,54 \leq k \leq 0,04$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

• Donc $S_{[0;\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36} \right\}$

3) on a $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définie ssi $2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ssi $2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$

ssi $2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$ ssi $x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$ Donc $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Donc $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ssi $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi$ ssi $2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi$ ssi $x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20}$ Donc $-1,45 \leq k \leq 0,55$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = -1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = \frac{9\pi}{40}$

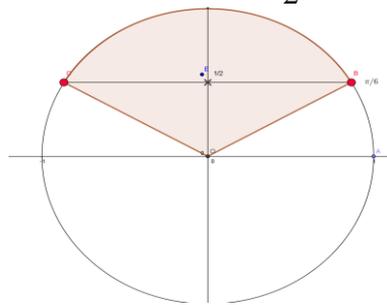
Pour $k = -1$ on trouve $x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40}$ Donc $S = \left\{ -\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40} \right\}$

II) les inéquations trigonométriques élémentaires

Exemple1 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ ssi $\sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$

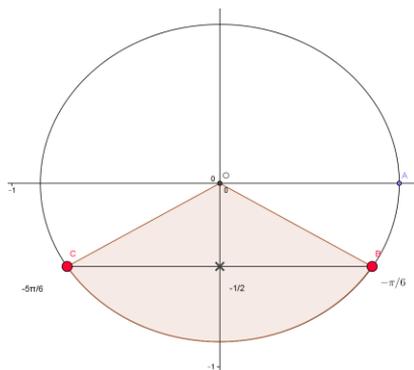
donc $S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$



Exemple2 : Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

$\sin x \leq -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x \leq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

donc $S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right]$



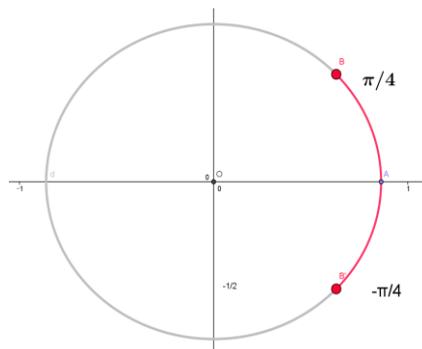
Exemple3 :

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation suivante :

$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos x \geq \cos \frac{\pi}{4}$

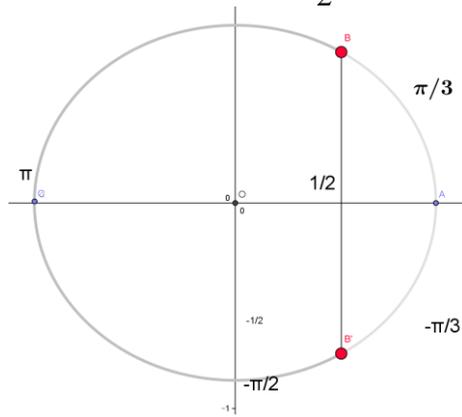
donc $S = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$



Exemple4 : Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x \leq \frac{1}{2}$

$$\cos x \leq \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$



Exemple5 : Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes : 1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

$$1) S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$2) S = [0, \pi]$$

Exemple6 : Résoudre dans $S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation suivante : $\tan x \geq 1$

$$S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Exemple7 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{On sait que : } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

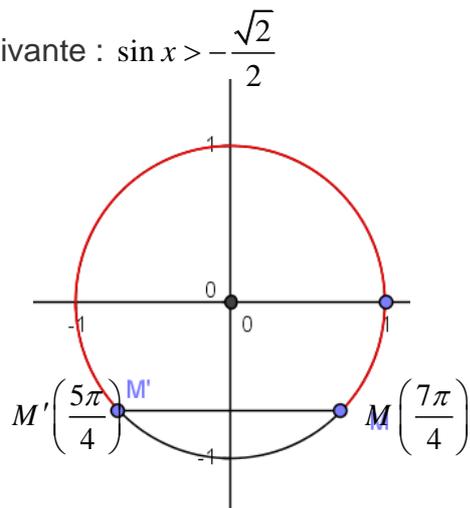
L'arc MM' en rouge correspond a tous les points $M(x)$

$$\text{tq } x \text{ vérifie } \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$$



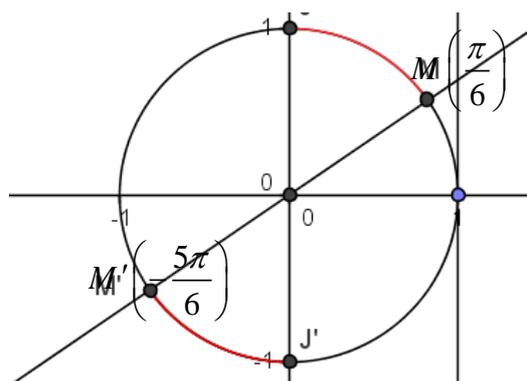
Exemple8 : Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation suivante : $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

$$\text{On a } 3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{On sait que : } \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Les arcs MJ et $M'J'$ en rouge correspondent a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$ Donc

$$S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$$



Exemple 9 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

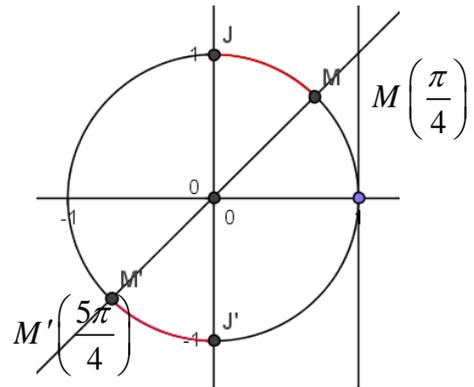
On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

Les arcs MJ et $M'J'$ en rouge correspondent à tous les points

$M(x)$ tq x vérifie $\tan x - 1 \geq 0$ Donc

$$S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$$



Activités : 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation suivante : $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

Correction: 1) a) on pose $t = \sin x$

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2t^2 - 9t - 5 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$$

$$\text{Les racines sont : } t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et } t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5 \text{ Donc } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = 5$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{R}

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \quad \text{Donc } 0,08 \leq k \leq 1,02 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 1$$

$$\text{Pour } k = 1 \text{ on remplace on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} \quad \text{Donc } -0,5 \leq k \leq 0,41 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on remplace on trouve } x_2 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Donc } S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ ssi $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$ Donc $\sin x - 5 < 0$

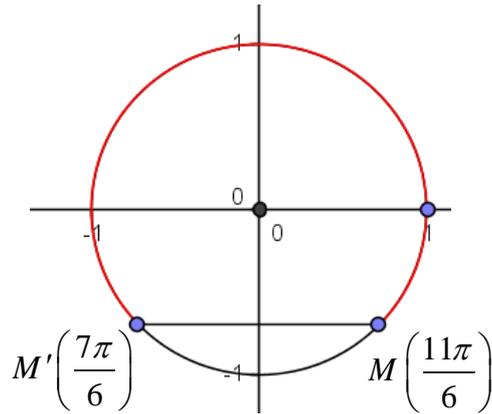
Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$ ssi $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$

$$\text{ssi } \sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

$$\text{tq } x \text{ vérifie } \sin x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

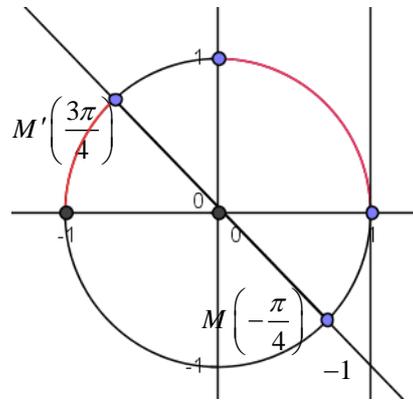
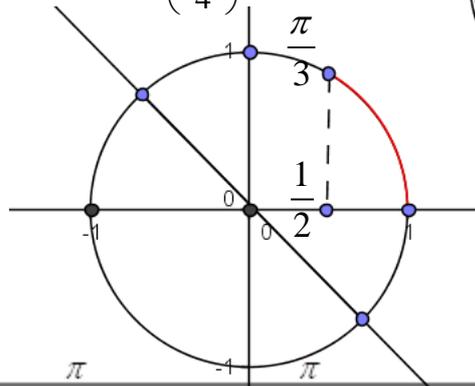


2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie dans $[0; \pi]$ ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Donc } D = [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$2\cos x - 1 \geq 0 \text{ ssi } \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x \geq \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\tan x + 1 \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq -1 \text{ ssi } \tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$



| x | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π |
|-----------------------------|---|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| $2\cos x - 1$ | + | 0 | - | - | - |
| $\tan x + 1$ | + | + | - | 0 | + |
| $(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$ | + | - | - | + | - |

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$$