

Bilan 5 : Calculer le PGCD de deux nombres entiers

Définition : Le **PGCD** de deux nombres entiers est **Plus Grand Commun Diviseur**.

<i>Méthodes de calcul</i>	<i>Exemples</i>
<p style="text-align: center;">Méthode 1 : Soustractions successives :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- Pour calculer PGCD de deux nombres, on soustrait le plus petit des deux nombres au plus grand. 2- On prend le résultat de la soustraction et le plus petit des deux nombres, et on recommence. 3- On continue jusqu'à obtenir zéro. 4- Le dernier nombre obtenu avant zéro est le PGCD. 	<p style="text-align: center;">PGCD de 36 et 60 :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $60 - 36 = 24$ • $36 - 24 = 12$ • $24 - 12 = 12$ • $12 - 12 = 0$ <p>donc $\text{PGCD}(36;60) = 12$</p>
<p style="text-align: center;">Méthode 2 : Algorithme d'Euclide :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- On fait la division euclidienne du plus grand nombre par le plus petit. (touche \boxed{R} de la calculatrice donne quotient et reste). 2- On recommence avec le diviseur et le reste de la division précédente. 3- On s'arrête lorsque le reste est nul. 4- Le PGCD est le dernier reste non nul. 	<p style="text-align: center;">Calcul du PGCD de 225 et 105 :</p> $225 = 105 \times 2 + 45$ $105 = 45 \times 2 + 15$ $45 = 15 \times 3 + 0$ <p>donc $\text{PGCD}(225,105) = 15$</p>
<p style="text-align: center;"><i>Fractions irréductibles :</i></p> <p>Une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. (C'est-à-dire si leur PGCD est égal à 1.)</p> <p><u>Pour obtenir la forme irréductible d'une fraction :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • on calcule le PGCD du numérateur et du dénominateur ; • puis on divise le numérateur et le dénominateur de cette fraction par leur PGCD. • On obtient une fraction irréductible. 	<p style="text-align: center;"><i>Exemples</i></p> <p>Simplifier la fraction $\frac{36}{60}$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • On calcule le PGCD, on trouve $\text{PGCD}(36 ; 60)=12$. • $\frac{36}{60} = \frac{\cancel{12} \times 3}{\cancel{12} \times 5} = \frac{3}{5}$ <p>Simplifier la fraction $\frac{225}{105}$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • On calcule le PGCD, on trouve $\text{PGCD}(225,105)=15$ • $\frac{225}{105} = \frac{\cancel{15} \times 15}{\cancel{15} \times 7} = \frac{15}{7}$
<p style="text-align: center;"><i>Nombres premiers entre eux :</i></p> <p>On dit que deux nombres sont premiers entre eux quand ils ont pour unique diviseur commun 1 ; c'est-à-dire que leur PGCD est 1.</p> <p><u>Pour déterminer si deux nombres sont premiers entre eux :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Soit on trouve un diviseur commun évident : souvent 2 ou 5 ou 10 ; ils ne sont donc pas premiers entre eux ; • Soit on calcule leur PGCD. 	<p style="text-align: center;"><i>Exemples</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • 7 965 et 6 195 ne sont pas premiers entre eux, car ils sont divisibles par 5. • 46 et 78 ne sont pas premiers entre eux, car ils sont divisibles par 2. • 1575 et 572 sont premiers entre eux, car en calculant leur PGCD, on trouve 1.
<p style="text-align: center;"><i>Résolution de problèmes :</i></p> <p>Pour résoudre un problème qui fait intervenir les diviseurs communs de deux nombres.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Il faut calculer le PGCD de ces deux nombres • Répondre à la question en utilisant le PGCD. • Souvent, il est nécessaire de faire un schéma pour comprendre ce qui est demandé. 	<p style="text-align: center;"><i>Exemples</i></p> <p>On veut recouvrir un mur (de dimensions 240 cm de haut et 176 cm de large) avec un <i>nombre entier</i> de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres <i>le plus grand possible</i>.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Déterminer la longueur du côté d'un carreau :</u> on calcule $\text{PGCD}(240, 176)=16$. la longueur du côté est 16 cm. • <u>Combien faudra-t-il alors de carreaux ?</u> Il faut 15 carreaux en hauteur car $15 \times 16 = 240 \text{ cm}$ et 11 carreaux en largeur car $11 \times 16 = 176 \text{ cm}$. C'est-à-dire $11 \times 15 = 165$ carreaux au total.