Notions en arithmétique

II – Multiples d'un nombre – Le plus petit multiple commun de deux nombres :

1-Définition :

Soient a et b deux entiers naturels. On dit que b est un multiple de a s'il existe un entier k tel que $b = ka$

Exemple :

$30 = 6 \times 5$ 30 est un multiple de 6 et aussi de 5

Attention ! $0 = 0 \times n$ pour tout n, donc 0 est multiple de tout nombre entier naturel.

2 – Définition :

Si a et b sont deux entiers non nuls, on appelle PPCM (Plus Petit Commun Multiple) de a et b, le plus petit des multiples communs strictement positifs de a et b.
On le note PPCM(a, b) ou $a \vee b$

Exemple :

Les premiers multiples positifs de 12 sont 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; etc.
Les premiers multiples positifs de 15 sont 0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; etc.

Les multiples communs strictement positifs de 12 et 15 sont : 60 ; 120 ; etc.
Le plus petit multiple commun strictement positif est 60. Donc PPCM(12 ; 15) = 60.

3 – Propriétes :

- Si m est un multiple commun à a et b, alors m est un multiple du PPCM de a et b.
- Si a est un multiple de b, alors **PPCM(a ; b) = a**.
- Quels que soient les entiers naturels non nuls a, b et k, **PPCM(ka ; kb) = k x PPCM(a ; b)**.

Exemples :

1) Le PPCM de 12 et 15 est 60 ; tout multiple de 60 est multiple de 12 et de 15.
2) PPCM(187 ; 17) = 187 car 187 est un multiple de 17 $(187 = 17 \times 11)$
3) PPCM(81 ; 45) = PPCM(9 x 9 ; 9 x 5) = 9 x PPCM(9 ; 5) = 9 x 45 = 405.

Exercice

Déterminer les multiples de 9 compris entre 23 et 59

les multiples de 9 s'écrivent sous la forme $9k$ avec $k \in \mathbb{N}$

les multiples de 9 compris entre 23 et 59 donc $23 \leq 9k \leq 59$

Donc $23/9 \leq k \leq 59/9$ donc $2,55 \leq k \leq 6,55$ or $k \in \mathbb{N}$

Donc $k = 3$ ou $k = 4$ ou $k = 5$ ou $k = 6$

Donc les multiples de 9 compris entre 23 et 59 sont : 3×9 ; 4×9 ; 5×9 ; 6×9

D'où 27 ; 36 ; 45 ; 54 sont les multiples de 9 compris entre 23 et 59

Notions en arithmétique

III - Diviseurs d'un entier naturel - Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels :

1-Activités :

a-Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 24 (D_{24}) et de 36 (D_{36}).

$D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ $D_{36} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$

b - En déduire les diviseurs communs de 24 et de 36.

$D_{24} \cap D_{36} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

c- Déterminer le plus grand diviseur commun de 24 et de 36.

le plus grand diviseur commun de 24 et de 36 est 12

2 -Définition :

Soient a et b deux entiers naturels. On dit que a est divisible par b s'il existe un entier naturel k tel que $a = kb$

Remarque :

si a est divisible par b. On dit alors que a est un multiple de b et de k.

Exemple : $30 = 6 \times 5$ 30 est divisible par 6 et par 5

2 - Critères de divisibilité.

– Par 2 : Un nombre est divisible par 2 s'il est pair, c'est-à-dire lorsqu'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

– Par 3 : Un nombre est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.

– Par 5 : Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

– Par 9 : Un nombre est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Exemple:
- 675 est divisible par 9 car 6+7+5=18 et 18 est divisible par 9.
- 114 est divisible par 3 car 1+1+4 = 6 et 6 est divisible par 3.

3 – Diviseurs communs – PGCD

Un diviseur commun de deux nombres a et b est un nombre qui divise à la fois a et b.

Exemples :

Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

Les diviseurs de 15 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15

Les diviseurs communs de 12 et 15 sont : 1 et 3

Notions en arithmétique

Définition :

Le PGCD de deux nombres a et b est le plus grand des diviseurs communs de a et de b.

Exemple :

Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

Les diviseurs de 15 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15

PGCD(15 ; 12) = 3

4. Lien entre PGCD et PPCM

Quels que soient les entiers naturels non nuls a et b,
PGCD(a ; b) x PPCM(a ; b) = a x b

5 - Définition :

Deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur **PGCD est 1**, c'est-à-dire lorsqu'ils n'ont comme diviseur commun que le nombre 1.

Exemple :

Les diviseurs de 27 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 27 Les diviseurs de 8 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8

8 et 27 sont premiers entre eux car PGCD(27 ; 8) = 1

IV - Nombres premiers - Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers :

2- Définition :

Un nombre entier est premier s'il possède **exactement deux diviseurs** qui sont 1 et lui-même.

Exemple:

Les nombres 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17 ; 19 sont premiers puisque chacun de ces nombres n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

6 = 3 x 2, ou encore 15 = 3 x 5 donc 15 et 6 ne sont pas des nombres premiers.

3 - Décomposition en nombres premiers :

Pour décomposer un nombre en produits de nombres premiers, il faut trouver tous les nombres premiers qui divisent ce nombre.

Pratiquement on part du plus petit (2) et on cherche les différents diviseurs jusqu'à obtenir 1

Notions en arithmétique

Exemples :

1) Décomposons 20 en produit de facteurs premiers.

20 | 2	20 divisible par 2. Le résultat de la division est 10
10 | 2	10 divisible par 2. Le résultat de la division est 5
5 | 5	5 est un nombre premier.
1	On écrit alors : $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

2) Décomposons 462 en produit de facteurs premiers.

462 | 2	462 divisible par 2
231 | 3	231 est divisible par 3 car 2+3+1 = 6 est divisible par 3
77 | 7	On écrit : $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$
11 | 11	
1	

Pour trouver le PPCM de deux nombres :

Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

PPCM(a , b) est le produit des facteurs premiers communs ou non à a et b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

Exemple :

$24 = 2^3 \times 3$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ donc $PPCM(90 ; 24) = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Notions en arithmétique

Pour trouver le PGCD de deux entiers naturels :

♣ Décomposer chaque nombre en produit de nombres premiers.

♣ **PGCD(a , b) est le produit des facteurs premiers communs à a et b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.**

Exemples :

$24 = 2^3 \times 3$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ donc PGCD(90 ; 24) = 2×3

Exercice :

1 – Décomposer les deux nombres 2352 et 1260 en produit de facteurs premiers.

2 – Déduire PGCD(2352 , 1260) et PPCM(2352 , 1260) .

3 - En déduire la forme irréductible $\frac{1260}{2352}$ et $\frac{1}{2352}+\frac{1}{1260}$

4 – Déterminer le plus petit entier b pour que $\sqrt{2352\times1260}=\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}};\mathbf{a}\in\mathbb{N}$

5 – Déterminer le plus petit entier naturel p tel que le nombre 2352p soit un carré parfait.

6 – Déterminer n tel que n + 4 divise n + 19

Solution de l'exercice :

I – 1 – Décomposer les deux nombres 2352 et 1260 en produit de facteurs premiers.

2352	2
1176	2
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2$ $\qquad$ $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

2 – Déduire PGCD(2352 , 1260) et PPCM(2352 , 1260) .

$2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2$

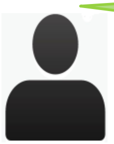
$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$\text{PGCD}(2352 , 1260) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$

$\text{PPCM}(2352 , 1260) = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 35280$

PPCM(a , b) est le produit des facteurs premiers communs ou non à a et b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

PGCD(a , b) est le produit des facteurs premiers communs à a et b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.



Exercices d'arithmétique

3 - En déduire la forme irréductible $\frac{1260}{2352}$ et $\frac{1}{2352}+\frac{1}{1260}$

$2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2 \qquad 1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

On a $\frac{1260}{2352}=\frac{2^2\times 3^2\times 5\times 7}{2^4\times 3\times 7^2}=\frac{3\times 5}{2^2\times 7}=\frac{15}{28}$

On a $\frac{1}{2352}+\frac{1}{1260}=\frac{1}{2^4\times 3\times 7^2}+\frac{1}{2^2\times 3^2\times 5\times 7}=\frac{3\times 5}{2^4\times 3^2\times 5\times 7^2}+\frac{2^2\times 7}{2^4\times 3^2\times 5\times 7^2}$

Donc $\frac{1}{2352}+\frac{1}{1260}=\frac{3\times 5}{2^4\times 3^2\times 5\times 7^2}+\frac{2^2\times 7}{2^4\times 3^2\times 5\times 7^2}=\frac{43}{35280}$

4 – Déterminer le plus petit entier b pour que $\sqrt{2352\times 1260}=\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}};\mathbf{a}\in\mathbb{N}$

On a $\sqrt{2352\times 1260}=\sqrt{2^4\times 3\times 7^2\times 2^2\times 3^2\times 5\times 7}=\sqrt{2^6\times 3^2\times 7^2\times 3\times 5\times 7}$

Donc $\sqrt{2352\times 1260}=2^3\times 3\times 7\sqrt{3\times 5\times 7}=168\sqrt{105}$

D'où a = 168 et b = 105

Exercices d'arithmétique

5 – Déterminer le plus petit entier naturel p tel que le nombre 2352p soit un carré parfait.

On a $2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2 = (2^2 \times 7)^2 \times 3$ **Donc $3 \times 2352 = (2^2 \times 7)^2 \times 3 \times 3$**

Donc $3 \times 2352 = (2^2 \times 7 \times 3)^2$ **Donc $3 \times 2352 = 84^2$**

le plus petit entier naturel p tel que le nombre 2352p soit un carré parfait est **p = 3**.

6 – Déterminer n tel que n + 4 divise n + 19

Pour que (n + 4) divise n + 19 il faut que $\frac{n+19}{n+4} \in \mathbb{N}$

On a $\frac{n+19}{n+4} = \frac{n+4+15}{n+4} = \frac{n+4}{n+4} + \frac{15}{n+4}$

donc $\frac{n+19}{n+4} = 1 + \frac{15}{n+4}$

Pour que (n + 4) divise n + 19 il faut que (n + 4) divise 15

Les diviseurs de 15 sont : 1 ;3. 5, 15

Donc n + 4 = 1 ou n + 4 = 3 ou n + 4 = 5 ou n + 4 = 15

donc n = – 3 ou n = – 1 ou n = 1 ou n = 11

Or $-3 \notin \mathbb{N}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$ d'où n = 1 ou n = 11