Suites numériques

EL KYAL MOHAMED

Suite arithmétique – Suite géométrique :

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + \left(n-p\right)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$u_p + ... + u_n = \left(n-p+1\right)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$	$u_p + ... + u_n = u_p \times \left(\dfrac{q^{n-p+1} - 1}{q-1}\right)$
a ,b et c trois termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

Suite majorée, minorée, bornée :

Soit $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite numérique

- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **majorée** par un nombre réel $M \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **minorée** par un nombre réel $m \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **bornée** si $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est majorée et minorée

Monotonie d'une suite :

Soit $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite numérique

- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **croissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **décroissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **constante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

Limite de la suite $\left(n^\alpha\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$

- **Limite de la suite $\left(q^n\right)$ avec $q \in \mathbb{R}$:**

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
la suite $\left(q^n\right)$ n'admet pas de limite	$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$	$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$	$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

- **Critère de convergence d'une suite :**

  - *Toute suite croissante et majorée est convergente*
  - *Toute suite décroissante et minorée est convergente*

$$\left.\begin{array}{l} \left|u_n - \ell\right| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

- **Suite de type $v_n = f\left(u_n\right)$:**

Si $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite convergente de limite ℓ et si f une fonction continue en ℓ

alors la suite $\left(v_n\right)$ définie par: $v_n = f\left(u_n\right)$ est convergente de limite $f(\ell)$

- **Suite de type $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$:**

Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ où f une fonction

Si :

- f une f continue sur un intervalle I
- $f\left(I\right) \subset I$
- $a \in I$
- $\left(u_n\right)$ une convergente

alors : la limite ℓ de la suite $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est solution de l'équation : $f\left(x\right) = x$