*Résumé de Cours :* **PRODUIT SCALAIRE** PROF : ATMANI NAJIB

**2BAC série science expérimental filière : svt+pc**
**avec Exercices avec solutions**

## 1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

**1)**Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Et soient $A$ ; $B$ et $C$ trois points l'espace tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ ;le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $ABC$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ et c'est un nombre réel définit par

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors et si $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$ et alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$

2)toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace

3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, dans le cas contraire.

4)$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Et on écrit : $\vec{u}\perp\vec{v}$

5)Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ .La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB et on a :

$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ et $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

**5)**Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace., on a :

a) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

b) $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=k\vec{u}.\vec{v}$, avec $k$ un nombre réel.

c) $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

d) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

e) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

f) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

g) $\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ h) $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$

i) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

j) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ k) $|\vec{u}\,.\,\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

m)Soit A, B et C trois points de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

## 2) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

a) $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormé si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires et normés et orthogonaux deux a deux c a d : $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$ et $\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{j}.\vec{k}=0$ et $\vec{i}.\vec{k}=0$

et on dira alors que $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé

et si $\vec{u}$ un vecteur de l'espace

alors Il existe un triplet unique (x ; y ; z ) de réels tels que :

$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Ce triplet (x ; y ; z ) est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$ relativement à la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

## 5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormée

1)si: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ sont deux vecteurs de l'espace alors : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2)si $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$

alors : $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

**1)**:soit $\vec{u}\left(a;b;c\right)$ un vecteur non nul et $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ un point de l'espace et $k\in\mathbb{R}$

L'ensemble des points $M\left(x;y;z\right)$ dans l'espace tq :

$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation cartésienne:

$ax+by+cz+d=0$

**2)**Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $(P)$ si, pour tous points $A$ et $M$ de $(P)$, on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

**3)**Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

**Propriété :**Soient $a$ et $b$ et $c$ des réels non tous nuls quelconque . L'ensemble $(P)$ des points $M\left(x;y;z\right)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\left(a;b;c\right)$.

**Proposition :** Soient : $(P)$ : $ax+by+cz+d=0$ et $(P)'$ : $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans dans l'espace et $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n'}(a';b';c')$ deux vecteurs normaux respectivement a $(P)$ et $(P)'$

1)Les plans $(P)$ et $(P)'$ sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

2)Les plans $(P)$ et $(P)'$ sont sécants ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires

3)Les plans $(P)$ et $(P)'$ sont perpendiculaires ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux

## 3) distance d'un point à un plan

**Proposition :** Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ un point et $(P)$ : $ax+by+cz+d=0$ un plan dans l'espace avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan.la distance du point A au plan $(P)$ est la distance AH et on a : $d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

**Remarque :** pour tout point M du plan $(P)$ on a AH $\leq$AM

## 4) Etude analytique de la sphère

***4-1)*** Dans tout ce qui va suivre, l'espace ($\mathscr{E}$) est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé.

**1)** Soit Ω un point dans l'espace ($\mathscr{E}$).
$R$ et un réel positif. La sphère de centre Ω et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ dans ($\mathscr{E}$), tels que $\Omega M = R$ On la note par : $S(\Omega, R) = \{M \in \mathscr{E} / \Omega M = R\}$

**2) :** Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $R \geq 0$, la sphère $S(\Omega, R)$ à une équation cartésienne de la forme :
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (1)

**4)** Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Et d'équation cartésienne :

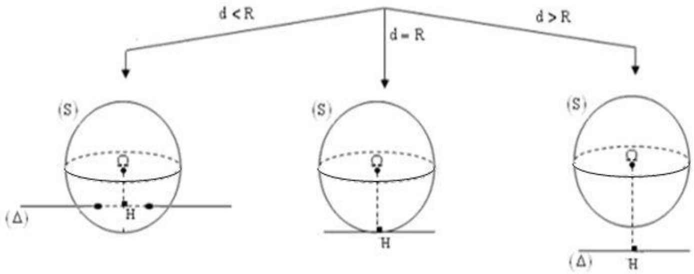
$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

***4-2) L'intersection d'une sphère et une droite*** **:**

Soient $(D)$ une droite de l'espace et $(S)$ une sphère de centre O et de rayon $R$ , H le projeté orthogonal du point O sur la droite $(D)$.

Notons d = OH :

- Si d > $R$ alors la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si d = $R$ alors la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite $(D)$ est tangente en H à $(S)$
- Si d < $R$ alors la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que
la droite $(D)$ est sécante à $(S)$. ( OA = OB = $R$ )




**Remarque:** Étudier la position relative de la sphère $(S)$ et la droite $(D)$ revient a résoudre un système formé par l'équation de la sphère et une de représentation paramétrique de la droite

***4-3) L'intersection d'une sphère et un plan***

Soient $(S)$ une sphère de centre $O$ et de rayon $R$ , $(P)$ un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de $O$ sur le plan $(P)$
et d = $O$H, la distance du point $O$ au plan $(P)$.

- Si d > $R$ alors le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si d = $R$ alors le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan $(P)$ est tangent en H à $(S)$
- Si d < $R$ alors l'ensemble des points commun au plan $(P)$ et la sphère $(S)$ est le cercle du plan $(P)$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (Théorème de Pythagore ), dans ce cas on dit le plan $(P)$ est sécant à $(S)$.

***4-4) le plan tangent a une sphère en un point :***

Soient $(S)$ une sphère de centre $\Omega$ et $A\in(S)$

Il existe un plan $(P)$ unique de l'espace tangent à la sphère en $A$ et définie par : $M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien