

CONTINUITÉ - EXERCICES CORRIGÉS

Exercice n°1.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Mêmes questions avec : $f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{pour } x \leq -1 \\ x & \text{pour } -1 < x \leq 1 \\ -3x & \text{pour } x > 1 \end{cases}$ sur \mathbb{R}

Exercice n°2.

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}

3) Quelle valeur de a faut-il choisir pour que la fonction définie par :

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ soit continue en 0 ?

Exercice n°3.

Le tarif ci-contre définit la fonction "tarifs postaux économiques" qui, au poids x exprimé en grammes, associe le tarif d'affranchissement exprimé en euros. Représentez graphiquement cette fonction et indiquez ses points de discontinuité

Poids en grammes
Jusqu'à :
20
50
100
250

Exercice n°4.

On considère un système d'imposition continu à 4 tranches telles que le contribuable paye :

- 0 % d'imposition sur les 8000 premiers euros de salaire
- 10 % d'imposition sur la tranche 8000 - 20000 euros de salaire
- 25 % d'imposition sur la tranche 20000 - 50000 euros de salaire
- 40 % d'imposition au delà de 50000 euros

1) Donner l'expression de la fonction f qui à tout revenu x associe l'impôt $f(x)$ correspondant

2) Dans un repère dont les unités seront judicieusement choisies, donner une représentation graphique de la fonction f .

3) Un contribuable déclare 30000 euros. Donner son impôt arrondi à l'euro près

4) Estimer le revenu annuel (arrondi à l'euro près) d'un contribuable dont l'impôt annuel est de 5000 euros.

Exercice n°5.

Soit f une fonction définie et continue sur $[-3; 4]$ dont le tableau de variations est :

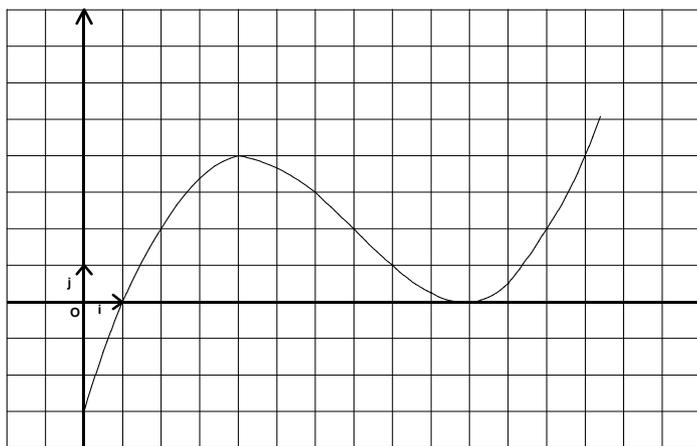
x	-3	0	1	3	4
$f(x)$	1	5	1	-3	1

1) Dénombrer, sans justifier, les solutions des équations suivantes :

- a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -2$

Exercice n°6.

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;14]$ dont la représentation graphique est :



- 1) Citez deux intervalles sur lesquels on peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire en expliquant pourquoi
- 2) Citez un intervalle sur lesquels on ne peut pas appliquer le théorème de la valeur intermédiaire en expliquant pourquoi
- 3) Peut-on trouver un unique nombre α tel que $f(\alpha) = 6$? Si oui, explicitez pourquoi et donner un encadrement de α à l'aide de deux entiers consécutifs.
- 4) Même questions avec un unique nombre β tel que $f(\beta) = 0$?

Exercice n°7. Le tableau ci-dessous résume les variations de f définie sur $I = [-2;2]$:

x	-2	0	2
$f(x)$	0	1 2	3

On précise que $f(0) = 1$

- 1) Peut-on trouver $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$?
- 2) Peut-on trouver $\beta \in I$ tel que $f(\beta) = 0,1$?
- 3) Montrez qu'il existe γ unique, $\gamma \in [0;2]$, tel que $f(\gamma) = 2,5$

Exercice n°8.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$

- 1) Etudier le sens de variation de g (+limites) et dresser son tableau de variation.
- 2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20 ; 40]$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

Exercice n°9. Deux méthodes de résolution

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 30x^2 + 112$

Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .

Première partie

- 1) Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
- 5) Avec la calculatrice, donner l'arrondi au dixième ou la valeur exacte de chaque solution.
- 6) En déduire le signe de f .

Deuxième partie

- 7) Calculer $f(2)$.
- 8) Trouver trois réels a , b et c tels que pour tout réel x : $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$
- 9) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice n°10.

Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une solution et une seule dans \mathbb{R} .

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

CONTINUITÉ - CORRECTION

Exercice n°1

1) Sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, (c'est-à-dire en dehors du point 2), f est continue puisqu'elle est définie à l'aide d'une fonction polynôme et d'une fonction affine

Pour examiner la continuité en 2, on détermine $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 5 - x = 3$. Comme

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$, on conclut que la fonction f est continue en 2

2) Sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, (c'est-à-dire en dehors des points -1 et 1), f est continue puisqu'elle est définie à l'aide de fonctions affines.

Pour examiner la continuité en -1, on détermine $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -2x - 3 = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$. Comme

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$, on conclut que la fonction f est continue en -1

Pour examiner la continuité en 1, on détermine $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -3x = -3$. Comme

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$, on conclut que la fonction f n'est pas continue en 1

Exercice n°2

1) f est continue sur $]-\infty; 0[$ en tant que fonction polynôme et sur $]0; +\infty[$ en tant que fonction affine. Reste à examiner la continuité en zéro. On examine $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 1 = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$. Ces deux limites étant égales

et égales à $f(0) = 0 - 1 = -1$, la fonction est continue en 0, donc sur \mathbb{R}

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ en tant que fonction polynôme et sur $]0; +\infty[$ en tant que fonction affine. Reste à examiner la dérivabilité en zéro.

Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x} = x$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable à gauche en 0 et

$f'_g(0) = 0$. De plus, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 1 - (-1)}{x} = 1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ donc f est dérivable

à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$. Mais comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, on conclut que f n'est pas dérivable en 0

2) f est continue sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Il reste à examiner la continuité en 2. Pour tout $x \neq 2$, $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1$, donc

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3 = f(2)$. La fonction est continue en 2, donc sur \mathbb{R}

3) f sera continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$. Il faut donc déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$. En posant

$g(x) = \sqrt{1+x}$, on reconnaît un taux d'accroissement : $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$, dont la limite en 0 est donc égale à

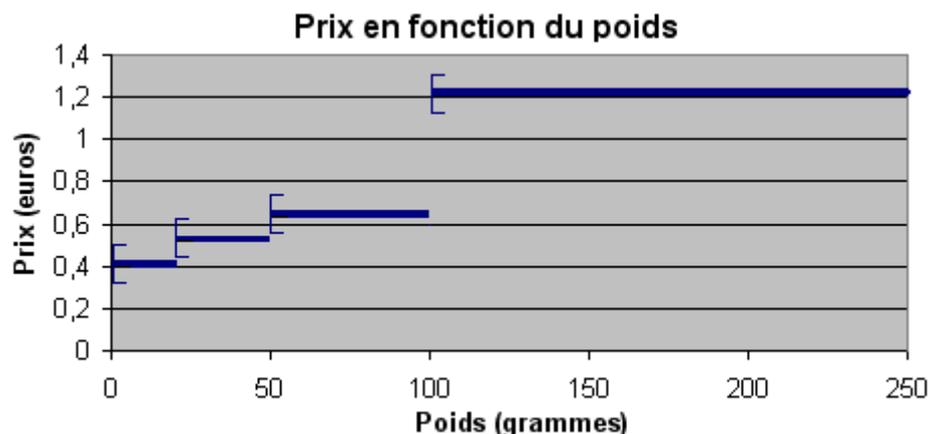
$g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$. f sera continue en 0 si et seulement si $a = \frac{1}{2}$

Exercice n°3

La fonction f qui, au poids x exprimé en grammes, associe le tarif d'affranchissement exprimé en euros, est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0,41 & \text{si } x \in [0; 20] \\ 0,53 & \text{si } x \in]20; 50] \\ 0,64 & \text{si } x \in]50; 100] \\ 1,22 & \text{si } x \in]100; 250] \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction en escalier dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



La fonction présente des points de discontinuité en 20,50 et 100

En effet, puisque $\lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 0,41$ et $\lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 0,53$, on aura $\lim_{x \rightarrow 20} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 20} f(x)$

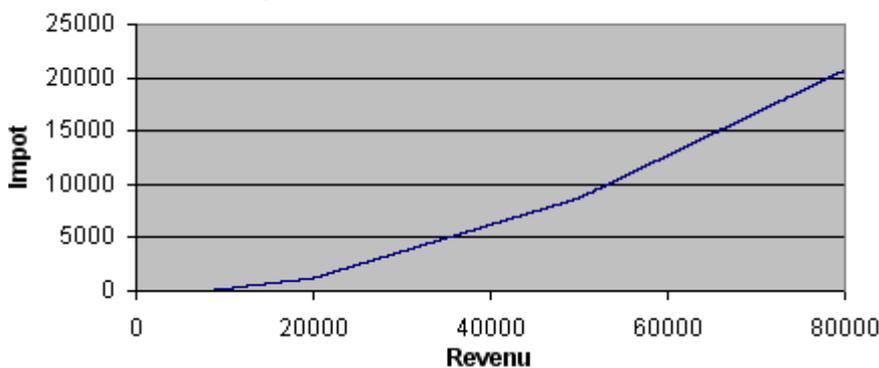
Exercice n°4

1) La fonction f qui, à tout revenu x associe l'impôt $f(x)$ exprimé en euros correspondant, est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 8000[\\ 0,1(x - 8000) = 0,1x - 800 & \text{si } x \in [8000; 20000[\\ 0,25(x - 20000) + \underbrace{0,1 \times 12000}_{\text{première tranche complète}} = 0,25x - 3800 & \text{si } x \in [20000; 50000[\\ 0,4(x - 50000) + \underbrace{0,1 \times 12000}_{\text{première tranche complète}} + \underbrace{0,25 \times 30000}_{\text{première tranche complète}} = 0,4x - 11300 & \text{si } x \in [50000; +\infty[\end{cases}$$

2) Il s'agit d'une fonction affine par morceaux dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

impôts en fonction du revenu



3) Si le contribuable déclare 30000 euros, son impôt sera égal à $f(30000) = 0,25 \times 30000 - 3800 = 3700$ €

4) Si le contribuable paye 5000 € d'impôts, son revenu se trouve dans la tranche $[20000; 50000[$. En résolvant l'équation $0,25x - 3800 = 5000 \Leftrightarrow x = \frac{5000 + 3800}{0,25} = 35200$, on déduit que le revenu du contribuable est environ égal à 35200 € annuel.

Exercice n°5

L'équation $f(x) = 3$ admet 2 solutions, l'une dans l'intervalle $[-3 ; 0]$, l'autre dans l'intervalle $[0 ; 3]$

L'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions, l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$, l'autre dans l'intervalle $[3 ; 4]$

L'équation $f(x) = -2$ admet 2 solutions, l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$, l'autre dans l'intervalle $[3 ; 4]$

Exercice n°6

1) On peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire par exemple sur l'intervalle $[0 ; 4]$ car la fonction y est continue et strictement croissante. De même on peut appliquer ce théorème sur l'intervalle $[4 ; 10]$

2) On ne peut pas appliquer le théorème de la valeur intermédiaire sur l'intervalle $[0 ; 10]$ car la fonction $n'y$ est pas strictement monotone.

3) Sur l'intervalle $[10 ; 14]$, f est continue et strictement croissante. De plus $f(10) = 0$ et $f(14) = 7$. Comme $6 \in [f(10); f(14)]$, il existe un unique nombre α tel que $f(\alpha) = 6$. Puisque $f(13) < 6$ et $f(14) > 6$, on en conclut que $13 < \alpha < 14$

4) Il n'existe pas de nombre unique β tel que $f(\beta) = 0$ sur l'intervalle $[0, 14]$, car f n'y est pas monotone. En revanche, c'est le cas sur l'intervalle $[0 ; 4]$ (on lit exactement $\beta = 1$)

Exercice n°7

f présente une discontinuité en 0

1) On ne peut pas trouver $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ car $\frac{3}{2}$ n'est pas une valeur prise par f

2) Sur l'intervalle $[-2 ; 0[$, f est continue et strictement croissante. Puisque $0,1 \in \left[f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \right]$, il existe un unique nombre $\beta \in I$ tel que $f(\beta) = 0,1$

3) Sur l'intervalle $[0 ; 2]$, f est continue et strictement croissante. Puisque $2,5 \in [f(0); f(2)]$, il existe un unique nombre $\gamma \in [0 ; 2]$, tel que $f(\gamma) = 2,5$

Exercice n°8

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$

1) g est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout x réel $g'(x) = 3x^2 - 1200 = 3(x^2 - 400) = 3(x - 20)(x + 20)$.

On en déduit successivement le signe de $g'(x)$ et le sens de variation de g :

x	$-\infty$	-20	20	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 15900$	$\searrow -16100$	$\nearrow +\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

$$g(-20) = 15900, \quad g(20) = -16100$$

2) Sur l'intervalle $[20 ; 40]$, g est continue et strictement croissante. De plus $g(20) = -16100 < 0$ et $g(40) = 15900 > 0$. Puisque $0 \in [g(20); g(40)]$, Le théorème de la valeur intermédiaire affirme l'existence d'une unique valeur $\alpha \in [20 ; 40]$ telle que $g(\alpha) = 0$. Grâce à la calculatrice, on dresse des tableaux de valeurs de plus en plus précis :

X	Y1
31	-7509
32	-5732
33	-3763
34	-1596
35	775
36	3356
37	6153

PUIS

X	Y1
34.2	-1138
34.3	-906.4
34.4	-672.4
34.5	-436.4
34.6	-198.3
34.7	41.923
34.8	284.19

nous permettant d'affirmer que $34,6 < \alpha < 34,7$

Exercice n°9

Première partie

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$,

2) f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 - 60x = 3x(x - 20)$. On en déduit que f s'annule en 0 et en 20, est strictement positive sur $]-\infty; 0[\cup]20; +\infty[$ et strictement négative sur $]0; 20[$.

3) Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$, strictement décroissante sur $]0; 20]$ et strictement croissante sur $[20; +\infty[$. Puisque $f(0) = 112$ et $f(20) = 20^3 - 30 \times 20^2 + 112 = -3888$, son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	0	20	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- 0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 112 ↘	$-\infty$	↗ $+\infty$
			-3888	

4) Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$, f est continue et strictement croissante. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0 < f(0)$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution $x_1 \in]-\infty; 0]$.

On procède de même sur les intervalles $]0; 20]$ et $[20; +\infty[$:

Sur l'intervalle $]0; 20]$, f est continue et strictement décroissante. Comme $f(20) < 0 < f(0)$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution $x_2 \in]0; 20]$.

Sur l'intervalle $[20; +\infty[$, f est continue et strictement croissante. Comme $f(20) < 0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution $x_3 \in [20; +\infty[$.

5) Grâce à la calculatrice, on dresse des tableaux de valeurs de plus en plus précis ceci permet d'établir que $-1,9 < x_1 < -1,8$, puis $x_2 = 2$ et enfin $29,8 < x_3 < 29,9$

6) Le signe de f est donné par :

f étant strictement croissante sur $]-\infty; 0]$, elle l'est sur $]-\infty; x_1]$, et pour tout $x \in]-\infty; x_1]$, $f(x) \leq f(x_1)$, c'est-à-dire $f(x) \leq 0$. De plus pour tout $x \in [x_1; 0]$, $f(x_1) \leq f(x)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x)$

f étant strictement décroissante sur $]0; 20]$, elle l'est sur $]0; x_2 = 2]$, et pour tout $x \in [0; x_2]$, $f(x) \geq f(x_2)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$. De plus pour tout $x \in [x_2; 20]$, $f(x) \leq f(x_2)$, c'est-à-dire $f(x) \leq 0$

f étant strictement croissante sur $[20; +\infty[$, elle l'est sur $[20; x_3]$, et pour tout $x \in [20; x_3]$, $f(x) \leq f(x_3)$, c'est-à-dire $f(x) \leq 0$. De plus pour tout $x \in [x_3; +\infty[$, $f(x_3) \leq f(x)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x)$

En résumé :

x	$-\infty$	x_1	$x_2 = 2$	x_3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	- 0 +

Deuxième partie

7) On calcule $f(2) = 2^3 - 30 \times 2^2 + 112 = 0$

8) Pour tout réel x , $(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

On aura alors $(x-2)(ax^2 + bx + c) = f(x)$ si et seulement si pour tout réel x ,

$$ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = x^3 - 30x^2 + 112, \text{ c'est-à-dire si et seulement si } \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -30 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -28 \\ c = -56 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) = (x-2)(x^2 - 28x - 56)$

9) On résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 28x - 56) = 0$ si et seulement si $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x^2 - 28x - 56 = 0$. Pour cette dernière équation du second degré, on calcule le discriminant $\Delta = (-28)^2 - 4 \times 1 \times (-56) = 1008$. Comme $\Delta = (12\sqrt{7})^2$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{28 + 12\sqrt{7}}{2} = 14 + 6\sqrt{7} \approx 29,87$ à 10^{-2} près et $x_2 = \frac{28 - 12\sqrt{7}}{2} = 14 - 6\sqrt{7} \approx -1,87$ à 10^{-2} près

Exercice n°10

L'équation $x^3 + 3x = 5$ étant équivalente à $x^3 + 3x - 5 = 0$, on note $f(x) = x^3 + 3x - 5$, qui est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} . On dérive : pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, on en déduit $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $0 \in \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

En utilisant la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ qui nous permet d'affirmer que $1,15 < \alpha < 1,16$. Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est donc 1,15