## Corrigé de l'exercice 1

On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\tan x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{\tan x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

Par suite la fonction $f$ est continue en $0$

## Corrigé de l'exercice 2

On a $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=x+4$ pour tout $x\neq 3$

Donc $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}x+4=7$

D'où $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)$

Par suite la fonction $f$ est continue en $3$

## Corrigé de l'exercice 3

On a $f(2)=\dfrac{2(2)+1}{7-3(2)}=5$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{2x+1}{7-3x}=5$

Et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}x+3=5$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=f(2)$ alors $f$ est continue en $2$

## Corrigé de l'exercice 4

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\pi(1+h))}{h} \quad \begin{pmatrix} h = x-1 \\ x\to 1 \\ h\to 0\end{pmatrix}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\pi+\pi h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin(\pi h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} -\pi\frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \quad \begin{pmatrix} t=\pi h \\ h\to 0 \\ t\to 0\end{pmatrix}\\ &= -\pi\end{aligned}$$

$f$ est continue en 1 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow \boxed{m=-\pi}$

## Corrigé de l'exercice 5

- On a $\lim_{x\to 0}\frac{\pi\tan(x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi}{3}\times\frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$ et la fonction "cos" est continue en $\frac{\pi}{3}$

  Donc $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\tan(x)}{3x}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

- On a $\lim_{x\to +\infty}\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$ et la fonction "sin" est continue en $\frac{\pi}{4}$

  Donc $\lim_{x\to +\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}=4$ et la fonction "$\sqrt{\ }$" est continue en $4$

  Donc $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}=\sqrt{4}=2$

## Corrigé de l'exercice 6

$f(x)=x^3+x-1$

1) Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $\mathbb{R}$

   On a :
   - $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ ( car $f$ est un polynôme )
   - $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=3x^2+1>0\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   - $0\in f(\mathbb{R})$ ( car $f(\mathbb{R})=f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ )

   Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $\mathbb{R}$

2) On a $f$ est continue sur $[0,1]$ et $\left.\begin{array}{r}f(0)=-1\\ f(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\times f(1)<0$

   Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $0<\alpha<1$

3) Etudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

   <u>$1^{er}$ cas</u> : si $x\le\alpha$

   Alors $f(x)\le f(\alpha)$ ( car $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ )

   Donc $\underline{\underline{f(x)\le 0}}$ ( car $f(\alpha)=0$ )

   <u>$2^{ème}$ cas</u> : si $x\ge\alpha$

   Alors $f(x)\ge f(\alpha)$ ( car $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ )

   Donc $\underline{\underline{f(x)\ge 0}}$ ( car $f(\alpha)=0$ )

## Corrigé de l'exercice 7

1) Montrons que l'équation $(E):1+\sin x = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

Considérons la fonction $h$ définie par : $h(x)=1+\sin(x)-x$

On a :

- $h$ est continue sur $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$
- $$\left.\begin{array}{r} h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}>0 \\ h\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)\times h\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$$

2) Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $h(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

D'où l'équation $(E):1+\sin x = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

## Corrigé de l'exercice 8

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I=\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

1) On a :
   - $f$ est <u>continue</u> sur $I=\mathbb{R}^+$( car $f$ est une fonction homographique )
   - $f$ est dérivable sur $I=\mathbb{R}^+$ et on a $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$ $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$

   Donc $f$ est <u>strictement croissante</u> sur $I=\mathbb{R}^+$

Par suite $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur l' intervalle $J=f(I)$ vers $I$

.

Tel que : $J = f\left(\mathbb{R}^+\right) = f\left([0,+\infty[\right) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[ = [-1,1[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in J = [-1,1[ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in I = \mathbb{R}^+ \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad xy + x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y - xy = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y(1-x) = x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{x+1}{1-x}$$

Donc : $\left(\forall x \in [-1,1[\right) \quad f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{1-x}$

## Corrigé de l'exercice 9

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I = ]1,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$

1) Montrons que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$
   On a :
   - $f$ est <u>continue</u> sur $I = ]1,+\infty[$
   - $f$ est <u>strictement croissante</u> sur $I = ]1,+\infty[$ ( car $\left(\forall x \in ]1,+\infty[\right) \quad f'(x) = 2(x-1) > 0$ )

   Par suite $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur l' intervalle $J = f(I)$ vers $I$.

   Tel que : $J = f\left(]1,+\infty[\right) = ]-1,+\infty[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in ]-1,+\infty[ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in ]1,+\infty[ \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y^2 - 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2y - x = 0$$

$\Delta = 4+4x = 4(1+x) > 0 \quad car \quad x > -1$

Donc $y = \dfrac{2-\sqrt{4(1+x)}}{2} = 1-\sqrt{x+1} < 1 \quad ou \quad y = \dfrac{2+\sqrt{4(1+x)}}{2} = 1+\sqrt{1+x} > 1$

Donc $y = 1+\sqrt{1+x}$

D'où $(\forall x \in ]-1,+\infty[) \quad f^{-1}(x) = 1+\sqrt{1+x}$

## Corrigé de l'exercice 10

- $A = \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} = \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[10]{2^2}\times\sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

- $B = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}+1}{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}+1\right)} = \dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+1} = \dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{4}$

- $C = \dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \dfrac{4^{\frac{1}{3}}.8^{\frac{1}{2}}.\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4^{\frac{1}{3}}.8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}} = 2^{2+\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$

- $D = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}{4-3} = \sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}$

## Correction de l'exercice 11

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0$

( car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}+x = +\infty$ )

2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+2^2\right)}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{(x-8)\left(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\dfrac{1}{12}$

3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{2x+6}^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right)}-\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt[3]{2x+6}^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4}-\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\\
&= \frac{2}{12}-\frac{1}{4}\\
&= \frac{-1}{12}
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-2x+4 &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left[1+\frac{3}{x^2}\right]}-2x+4\\
&= \lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\left[1+\frac{3}{x^2}\right]}-2x+4\\
&= \lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left[1+\frac{3}{x^2}\right]}-2+\frac{4}{x^2}\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\text{Car}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\left[1+\frac{3}{x^2}\right]}-2+\frac{4}{x^2}\right)=-1\end{cases}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\dfrac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$

$$\text{Car :}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}x+1=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}x-1=0^+\end{cases}$$

## Corrigé de l'exercice 12

On a : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

On pose $x = t^6$ , l'équation devient $\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6} - 12 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+6) = 0$

$\Leftrightarrow t - 2 = 0 \quad ou \quad t^2 + 3t + 6 = 0 \quad (\Delta = -15 < 0)$

$\Leftrightarrow \quad t = 2$

Donc $x = 2^6 = 64$ . D'où $S = \{64\}$