

## Définition

✓  $\ln$  (logarithme népérien) est la primitive de  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  et qui s'annule en 1

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in ]0, +\infty[$$

$$\ln(1) = 0$$

## propriétés

✓  $\ln$  est une fonction définie, continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$

✓  $\ln$  est une fonction strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

- $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$
- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

| $x$      | 0 | 1 | $+\infty$ |
|----------|---|---|-----------|
| $\ln(x)$ |   | - | +         |

## Propriétés algébriques

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$(x, y \in ]0, +\infty[)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad r \in \mathbb{Q}$$

## Le nombre e

$$\ln(e) = 1$$

$$e \approx 2,71$$

$$\ln(e^r) = r$$

$$r \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = r \Leftrightarrow x = e^r$$

## Les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

## La dérivation :

Si  $u$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction  $x \rightarrow \ln|u(x)|$

est dérivable sur  $I$  et on a :  $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

## La fonction logarithme de base a :

## Définition

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

avec  $a$  un réel strictement positive et différent de 1

## Résultats

$$\bullet \log_a(a) = 1 \quad \bullet \log_e(x) = \ln(x) \quad \bullet \log_a(a^r) = r$$

## Logarithme décimal

Est La fonction logarithme de base 10, on la note  $\log$

$$\checkmark \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \quad \log(10^r) = r$$