

Exercices d'applications et de réflexions : fonctions exponentielles

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice1 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ 2) $\exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Exercice2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $e^{1-x} \times e^{2x} = e$ 2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$

3) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ 4) $e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7}$

5) $e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^x$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$ 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1}$ 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x}$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x$ 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2}$ 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x}$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x$ 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$ (on pose : $2x = X$) 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$

17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1}$ 18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-1)e^x$

19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x$ 20) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

21) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)e^{2x}$ 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ 24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1}$

25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$ 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

Exercice4 : Déterminer les dérivées des fonctions

suivantes : 1) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$ 3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

Exercice5 : Déterminer les primitives des

fonctions suivantes : 1) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

2) $g(x) = (e^x)^2$ 3) $h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

Exercice6 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

2) $I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$

3) $I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$

4) $I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$

5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ $I =]0; +\infty[$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)e^x$$

- 1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 2) Etudier les branches infinies de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$
- 3) Etudier la concavité de la courbe C_f
- 4) Construire la courbe C_f .

Exercice8 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$$

- 1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

- 4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Et étudier la position de la courbe C_f avec les asymptotes obliques

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

- 1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$

7) calculer : $f(2 \ln 2)$ et construire la courbe C_f .

Exercice10: Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f .

Exercice11 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Exercice12 : Considérons la fonction f définie sur

\mathbb{R} par : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$ et soit (C) la courbe

De f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) a) montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2) a) vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe C_f avec la droite (D)

3) a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de C_f

d) montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{i} \vec{j})$

5) a) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^+

par : $f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .

5) a) Montrer que $(\forall t > 0) 0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f .

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{-\frac{2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n

puis dresser le tableau de variation de f_n .

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$

admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$

3)a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)_n = 0$

Exercice14 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $5^x = 15$ 2) $3^{2x} \geq 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1} - 7^{-x} < 6$

Exercice15 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $2^{x+1} = 8^x$ 2) $3^x = 12$ 3) $5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4) $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

5) $2^{x-1} > 4^x$ 5) $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Exercice16: Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x) = 3^{x-2}$

Exercice17: Soit La fonction f définie par :

$f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ 1) déterminer D_f

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f

5) construire la courbe C_f dans un repère $(O; \vec{i} \vec{j})$

Exercice 18: Soit La fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^x, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

5) Tracer la courbe C_f .

6) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $f(x) = x$

7) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$

et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$

b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle converge.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1 .

2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en point d'abscisse 1.

3. Construire la courbe (C_1) et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .

5. a) Étudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de :

$$f_2(x) - f_1(x)$$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes (C_1) et (C_2) ; puis construire (C_2)

6. Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n .

a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e} \right)^n$

b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}}))$

d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n})$

Et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices Que l'on devient un mathématicien

