La fonction racine d'ordre n { la racine $n^{ième}$ }(n ϵIN*)

Les puissances radicales

Prof. Smail BOUGUERCH

Propriété et définition:

La fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ admet une fonction réciproque nommée la fonction racine d'ordre n ou racine $n^{ième}$ et qui est notée : $\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

Cas particuliers:

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ (racine carrée)
- Le nombre $\sqrt[3]{x}$ s'appelle la racine cube de x

Propriétés:

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} \succ \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \succ y$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \forall (m;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} ; y \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$

Remarque importante (le conjugué):

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition D_f est :
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D_f = [0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

Les limites:

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$
$l \geq 0$
$+\infty$

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$\sqrt[n]{l}$
$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
Si u est une fonction positive et continue sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ Et on a : $\forall x \in]0;+\infty[; \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I Et on a : $\forall x \in I ; \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$

Résolution de l'équation $x^n = a$ **avec** $(x \in \mathbb{R})$ **et** $(a \in \mathbb{R})$**:**

	n est pair	n est impair
$a \succ 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a} ; \sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a \prec 0$	$S = \varnothing$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Les puissances radiculaires d'un réel strictement positif:

Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul tel que : $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in]0;+\infty[; x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$

Remarques:

- $\forall x \in]0;+\infty[; \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- Si f est une fonction numérique à variable réelle x définie comme suit : $(r \in \mathbb{Q}^*) ; f(x) = [u(x)]^r$

  Alors son domaine de définition est : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \succ 0\}$ ..
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tout x et y de $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout r et r' de $\mathbb{Q}^*$	
$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$	$\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'} = \left(x^{r'}\right)^r$
$(x \times y)^r = x^r \times y^r$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
$\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$	$\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$