Année scolaire : 2022 – 2023	Examen national 2013 1ière session	AGOUZAL 2 BPCF

Exercice 1 : (2013 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points A(-1, 1, 0), B(1, 0, 1) et Ω (1, 1, -1) et la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R = 3$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

b) Vérifier que : $d(\Omega;(OAB)) = \sqrt{3}$ puis montrer que (OAB) coupe (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$.

2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (OAB).

a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ (t ∈ ℝ) est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ).

Exercice 2 : (2013 S1) (3pts)

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 7 + 2i$, $b = 4 + 8i$, $c = -2 + 5i$

1) a) Vérifier que : $(1+i)(-3+6i) = -9 + 3i$ et

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = 1 + i$

b) En déduire que $AC = AB\sqrt{2}$ et donner déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d = 10 + 11i$

b) Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire les points B, C et D sont alignés.

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Une caisse contient 10 boules : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :

A″ Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes″

B ″ aucune boule parmi les quatre tirées n'est banche″

Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{7}$ et $P(B) = \dfrac{1}{3}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de boules blanches tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

b) Montrer que $p(X = 1) = \dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_{n+1} = \frac{25}{10 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1 = 0$$

1) Vérifier que: $5 - U_{n+1} = \dfrac{5(5 - U_n)}{5 + (5 - U)_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Et montrer par récurrence **que:** $5 - U_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) On pose $V_n = \dfrac{5}{5 - U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{10 - U_n}{5 - U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ puis vérifier que $V_{n+1} - V_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Montrer que : $V_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que : $U_n = 5 - \dfrac{5}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Déterminer $\lim U_n$

Problème : (2013 S1) (8pts)

On considère la fonction f définie sur ℝ par :

$f(x) = (x-2)^2 e^x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

b – Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.(on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ $n \in \mathbb{N}^*$)

2) a – Montrer que $f'(x) = x(x-2)e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b – Montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et est décroissante sur $[0; 2]$

c – Dresser le tableau des variations de la fonction f sur ℝ.

3) a – Montrer que $f''(x) = (x^2 - 2)e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Et en déduire que (C_f) admet deux points d'inflexions (les cordonnées des points ne sont pas demandées)

b - Construire la courbe (C_f).

4)) a – Montrer que $H : x \to (x-1)e^x$ est une primitive de $h : x \to xe^x$ sur ℝ Puis calculer $\int_0^1 xe^x dx$

b - A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

c- Montrer que l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1 est 5(e -2)cm².

5) Utiliser la courbe (C_f) pour donner le nombre de solutions de l'équation $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$; x∈ℝ