Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

Fiche Exercices

Calculer des limites

Méthode :

On commence par analyser $f(x)$. Peut on directement appliquer l'un des théorèmes du cours (limites et opérations, théorèmes de comparaison) ?
Dans la négative, il est nécessaire de donner à $f(x)$ une nouvelle expression relevant de ces théorèmes. Cette nouvelle expression peut être obtenue en imposant à la variable une condition compatible avec la recherche de la limite : condition du type $x > x_0$ pour une étude en $+\infty$, condition du type $x < x_0$ pour une étude en $-\infty$, condition du type $|x| < \alpha$ pour une étude en zéro ...
On doit distinguer soigneusement la phase « recherche d'une expression convenable de $f(x)$ » de la phase « passage à la limite » : les enchaînements du genre $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = ...$ sont prohibés car l'égalité $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ n'a de sens que lorsque l'on a précédemment établi qu'il existe ℓ tel que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.
Dans les cas où x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, mettre en facteur les termes « les plus puissants » est toujours pertinent.

Exercice 1
Déterminer le comportement asymptotique de la fonction f en a dans les cas suivants :
a) $f(x) = 4x^3 \sin^2 x - x + 5$ pour tout x et $a = +\infty$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1 + \sqrt{x}}{2x^2 - x + 1}$ pour $x \geq 0$ et $a = +\infty$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + x$ pour tout x et $a = -\infty$;

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 5} - x$ pour tout x et $a = +\infty$;

e) $f(x) = \dfrac{2\cos 2x - 1}{6x - \pi}$ pour $x \neq \dfrac{\pi}{6}$ et $a = \dfrac{\pi}{6}$.

Montrer qu'une droite est une asymptote oblique

Méthode :

Selon le programme, l'équation de l'asymptote doit être donnée ou au moins suggérée. On se trouve alors face à l'étude d'une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Ne pas oublier que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$ équivaut à $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, avec a et b réels ...

Exercice 2
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x^2 - 4x + 5}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - 2x$.
En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote dont on donnera une équation.

Etudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Méthode :

On analyse l'expression qui définit la fonction, et on applique au mieux les conditions suffisantes de dérivation (somme, produit, composée ...). On détermine ainsi que la fonction est dérivable dans un intervalle J. Lorsque cet intervalle est égal à l'intervalle I sur lequel la fonction est définie, l'étude est terminée. Sinon, on doit étudier la dérivabilité en tout point de I qui n'appartient pas à J, cette fois à l'aide de la définition dérivabilité.

Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

Fiche Exercices

Exercice 3
Etudier la dérivabilité :
a) de la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$;
b) de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour $x \leq -1$.

Optimiser

Méthode :

Il s'agit d'étudier les variations d'une fonction pour établir qu'elle admet un extremum.

Exercice 4
On désigne par (C) la courbe d'équation $y = x^2$ et par A le point de coordonnées $(0,1)$. Déterminer le point B de la courbe, d'abscisse positive, qui est le plus proche du point A.

Etablir une inégalité sur un intervalle

Méthode :

Lorsque il est impossible de régler le problème par le calcul algébrique on met l'inégalité considérée sous l'une des deux formes $f(x) \geq 0$ ou $f(x) > 0$ et on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle. En principe la fonction f est monotone sur l'intervalle et doit donc donner une image positive à l'une des bornes de celui-ci. . .

Exercice 5
Montrer que : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout x positif.

Résoudre une équation

Méthode :

Lorsqu'une résolution algébrique est impossible on utilise le théorème des fonctions continues et strictement monotones. Il est alors nécessaire de mettre l'équation sous l'une des deux formes $f(x) = \lambda$ ou $g(x) = 0$, cette dernière étant plus pratique. On peut ensuite passer à l'étude des variations de la fonction (f ou g suivant le cas) sur l'intervalle considéré. Il est à noter que toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles du programme de terminale S sont continues, et que démontrer qu'une fonction est continue en un point ou sur un intervalle n'est pas un objectif du programme (commentaires officiels du programme).

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 - 3x^2 - 36x + 2 = 0$.

Utiliser une fonction auxiliaire g pour étudier une fonction f

Méthode :

Lorsque $f' = g.k$ sur l'intervalle I où k est une fonction strictement positive sur I, et g une fonction dont on ne peut déterminer le signe par des moyens algébriques, on doit étudier les variations de g pour obtenir le signe de f'.

Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

Fiche Exercices

Exercice 7

a) On désigne par g la fonction définie par $g(x) = x^3 + x^2 - 1$ pour tout x. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]0, 1[$.

b) On désigne par f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x}$ pour x appartenant à $]0,+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour $x > 0$.
En déduire le signe de f'.

Encadrer une solution d'une équation du type $f(x) = 0$

Méthode :

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et telle que $f(a)\ f(b) < 0$. Alors tout couple (a', b') appartenant à $[a,b]^2$ tel que $f(a')\,f(b') < 0$ est un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 8

Suite de l'exercice précédent.
c) Montrer que $0,75 < \alpha < 0,76$.

Encadrer $f(\alpha)$ lorsque la fonction f présente un extremum en α

Méthode :

Dans cette situation, les variations de f ne permettent pas d'encadrer $f(\alpha)$, puisque de $a < \alpha < b$, on peut seulement déduire $f(a) < f(\alpha)$ et $f(b) < f(\alpha)$ lorsque $f(\alpha)$ est un maximum, $f(a) > f(\alpha)$ et $f(b) > f(\alpha)$ lorsque $f(\alpha)$ est un minimum.
Pour régler ce problème, il suffit d'établir que l'on a $f(\alpha) = h(\alpha)$ où h est une fonction monotone sur un intervalle J contenant α.
En principe, la fonction h est donnée par l'énoncé, et pour établir l'égalité $f(\alpha) = h(\alpha)$, le plus simple est généralement de calculer $f(\alpha) - h(\alpha)$.
C'est alors la relation $f'(\alpha) = 0$ (définissant α) qui permet de montrer que cette différence est nulle.

Exercice 9

Suite de l'exercice précédent.

d) Montrer que $f(\alpha) = h(\alpha)$ où h est la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}$ pour x appartenant à $]0, 1]$.

e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux dont la différence est $0,1$.

Encadrer une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ par balayage

Méthode :

On considère une fonction f continue, strictement monotone sur $[a, b]$ et telle que $f(a)\ f(b) < 0$.
Les instructions suivantes :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$,
- $a_{n+1} = a_n + k\,\frac{b_n - a_n}{10}$ et $b_{n+1} = a_n + (k+1)\,\frac{b_n - a_n}{10}$ où k est l'entier naturel compris entre 0 et 9 tel que :

$f\left(a_n + k\,\frac{b_n - a_n}{10}\right) \times f\left(a_n + (k+1)\,\frac{b_n - a_n}{10}\right) < 0$, définissent deux suites adjacentes dont la limite commune est la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

Fiche Exercices

Un algorithme pour le balayage

Méthode :

Avec les notations ci-dessus l'algorithme suivant calcule le plus petit rang n pour lequel $b_n - a_n$ est inférieur à une valeur donnée, et affiche a_n , b_n et n.

Initialisation
    Affecter la valeur de la borne inférieure de l'intervalle à la variable a.
    Affecter la valeur de la borne supérieure de l'intervalle à la variable b.
    Affecter l'incertitude désirée à la variable e.

Début
    Affecter 0 à la variable n.
    Affecter la longueur de l'intervalle $[a, b]$ à la variable d.
    Tant que $d > e$ faire
        $d \leftarrow \frac{d}{10}$: $n \leftarrow n + 1$.
        Tant que $f(a) \times f(a + d) > 0$ faire
            $a \leftarrow a + d$.
        Fin Tant que.
    Fin Tant que.
  Afficher $a, a + d, n$.
Fin.

Encadrer une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ par dichotomie

Méthode :

On considère une fonction f continue, strictement monotone
sur $[a, b]$ et telle que $f(a)\ f(b) < 0$.
Les instructions suivantes :
- $a_0 = a$ et $b_0 = b$,
- si $f(a_n) f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ sinon $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ définissent deux suites adjacentes dont la limite commune est la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Un algorithme pour la dichotomie

Méthode :

Avec les notations ci-dessus l'algorithme suivant calcule le plus petit rang n pour lequel $b_n - a_n$ est inférieur à une valeur donnée, et affiche a_n , b_n et n.

Initialisation
    Affecter la valeur de la borne inférieure de l'intervalle à la variable a.
    Affecter la valeur de la borne supérieure de l'intervalle à la variable b.
    Affecter l'incertitude désirée à la variable e.

Fiche Exercices

Début
    Affecter 0 à la variable n.
    Affecter la longueur de l'intervalle à la variable d.
    Tant que $d > e$ faire
        $d \leftarrow \frac{d}{2}$: $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$: $n \leftarrow n+1$.
        Si $f(a)\ f(c) < 0$ alors faire
            $b \leftarrow c$.
        Sinon faire
            $a \leftarrow c$.
        Fin Si.
    Fin Tant que.
  Afficher a, b, n.
Fin.