Etude de fonctions

I) *Limite d'une fonction (Rappel)*

Limite d'une fonction polynôme

- *Si f est une fonction* **polynôme** *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- *La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré*

Limite d'une fonction rationnelle

- *La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré.*

- Soit f une fonction rationnelle tel que : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$
- Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ forme indéterminée. C'est à dire $\boldsymbol{a}$ est une racine de $p(x)$ et $q(x)$

donc $$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)p_1(x)}{(x-a)q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Limite d'une fonction irrationnelle

- Si $\lim\limits_{x\to ?} f(x) = a$, avec $(a \geq 0)$ alors $\lim\limits_{x\to ?} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim\limits_{x\to ?} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to ?} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Limites usuelles

Soit $n \in IN^*$ **on a:**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ *si n est impair*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ *si n est pair*
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Limites trigonométriques

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Formes indéterminées

$+\infty + (-\infty)$ ***et*** $0 \times \infty$

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ***et*** $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Operations sur les limites

Dans ce paragraphe, $\boldsymbol{a}$ désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et M sont deux nombres réels.

Limite de la somme de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	M	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F. I**

Limite du produit de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	M	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x))$	$L\times M$	∞	∞	**F. I**

Le signe se détermine en respectant la règle des signes

Limite du quotient de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq0$	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M\neq0$	0	M	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{L}{M}$	∞	∞	**F. I**	**F. I**

Limites et ordre.

Dans ce paragraphe, $\boldsymbol{a}$ désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème1: Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\boldsymbol{I}$.

- **Si** $(\forall x\in I); f(x)\geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- **Si** $(\forall x\in I); f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

THÉORÈME DES GENDARMES : Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $\boldsymbol{I}$. et k un réel.

Si $(\forall x\in I); g(x)\leq f(x)\leq h(x)$

et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = k$ Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$

Lemme :

Si $(\forall x\in I); |f(x)-k|\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1: Calculer les limites

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+3x^2-x^3$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-2x+5$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x+1\right)$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-5}{x-x^2+9}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-5}{x^2-6x+9}$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x^2-3x}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2}{4x^2+1}}$
8) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x^2-1}$
9) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$
10) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$
11) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1}$
12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+3}-2x$
13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+3}+2x$
14) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$
15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+3}-x$
16) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+3}+x$
17) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x(x-3)}{x-\sqrt{x+1}-1}$
18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-3x$
19) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$
20) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+x-5}{x-2}$
21) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
22) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$
23) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x}$
24) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+\cos^2 x}{x^2+2}$

Exercice2 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0\,;3[$ par: $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-3x}$

1) Etudier le signe de f sur l'intervalle I.
2) Calculer les limites de f aux bornes de I.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-6x+9}$

1) Etudier le signe de x^2-6x+9.
2) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

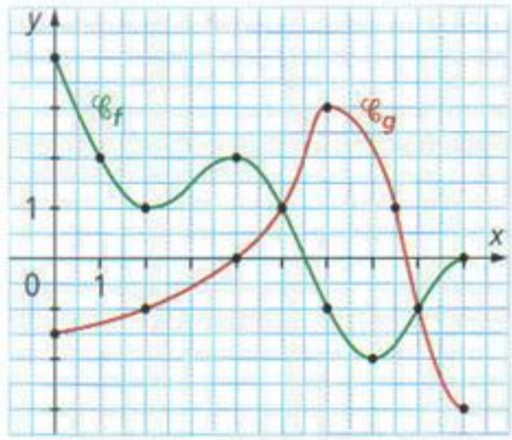
Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

1) Montrer que, $(\forall x>0)$; $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{1}{x^2}$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 5 :

Soient (C_f) *et* (C_g) les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g .



1) Conjecturez
   a) (D_f) *et* (D_g)
   b) $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$
   c) $f([0;2])$ *et* $g([0;9])$
   d) Le signe de $f(x)$.
   e) Le signe de $g'(x)$.
   f) Le tableau de variation de f.

2) Quelles sont les solutions des équations:
$$f(x)=g(x)\ ;\ f(x)=0\ ;\ f(x)=-1 \ et\ \ g(x)=1$$
3) Soit m un réel donné, donnez le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.
4) Résoudre graphiquement l'inéquation: $f(x)\le g(x)$.
5) Supposons que $D_f=[-9;9]$ et f est une fonction paire .
   a) Donnez la valeur de: $f(-4)$ *et* $f(-7)$
   b) Complétez la construction de la courbes (C_f) .

6) Construire la courbe de la function $|f|$ sur l'intervalle $[0;9]$.

Le succès est la somme de petits efforts, répétés jour après jour.
Leo Robert Collier

II) *Continuité d'une fonction.*

1) *Continuité en un point- continuité à droite - continuité à gauche*

Définition1: Soit ***f*** une fonction définie sur un intervalle ouvert ***I*** et $a \in I$.

On dit que ***f*** est continue en ***a*** si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Attention: *Une fonction ne peut pas être continue en un point qui n'appartient pas au domaine de définition, cela n'a aucun sens.*

Définition2: Soit ***f*** une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; a+\alpha[$ *avec* $\alpha > 0$.

On dit que ***f*** est continue à droite en ***a*** si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Propriété1: Soit ***f*** une fonction définie sur un intervalle ouvert ***I*** et $a \in I$.

On dit que ***f*** est continue en ***a*** si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Théorème: Si ***f*** est dérivable en un point ***a***, alors ***f*** est continue en ***a***.

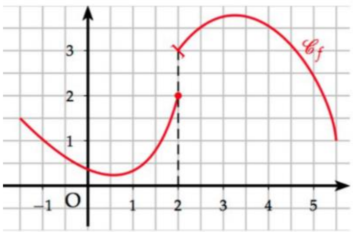
Attention **:** *La réciproque est fausse.*

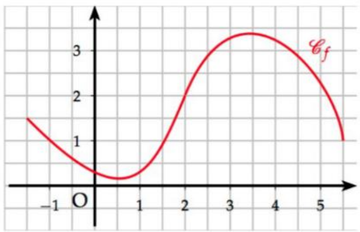
2) *Continuité sur un intervalle*

Définition : On dit qu'une fonction ***f*** est continue sur un intervalle ouvert si elle continue en tout point de l'intervalle.

Remarque **:** *Dire que* ***f*** *est continue sur* ***I*** *signifie que l'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.*

La fonction ***f*** est discontinue en **2** car $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$





La fonction ***f*** est continue en **2** car $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2 = f(2)$

Propriétés : - Toute fontion polynôme est continue sur **IR**.

- Toute fonction rationnelle est continue sur les intervalles où elle est définie.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Les fonctions ***sinus*** et ***cosinus*** sont continues sur **IR**.
- La fonction ***tangente*** est continue sur ses intervalles de définition.
- Toutes les fonctions construites par **somme**, **produit**, **quotient** ou par **composition** des fonctions précédentes sont continues sur leur domaine de définition.

Théorème: Si ***f*** est dérivable sur ***I***, alors ***f*** est continue sur ***I***.

Attention **:** *La réciproque est fausse.*

Exemple **:** la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, mais n'est pas dérivable en zéro.

3) *Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.*

Propriétés : L'image d'un intervalle ***I*** par une fonction continue ***f*** est un intervalle ***f(I)*.**

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarques : $f([a;b]) = [m;M]$ tels que ***m*** est le minima et ***M*** est le maxima de ***f*** sur le segment $[a;b]$.

- Si l'intervalle ***I*** n'est pas fermé, alors son image est un intervalle qui peut être fermé, ouvert ou semi-ouvert.

Cas particulier :

L'image d'un intervalle I par une fonction f **continue** et **monotone** est un intervalle $J= f(I)$.

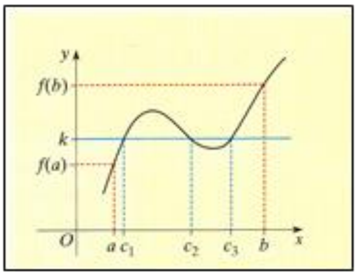
	$f(I)$ est l'intervalle:	
Si $I = \dots$	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

4) *Théorème des valeurs intermédiaires.*

Théorème : Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle $[a;b]$.Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c)=k$

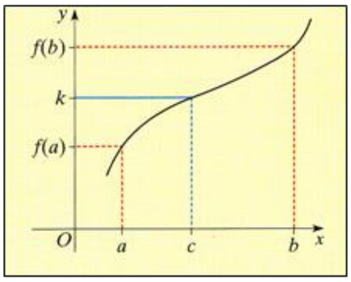
Autrement dit : l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a;b]$.

Interprétation graphique: La droite (D): $y=k$ coupe la courbe de f en au moins un point dont l'abscisse est comprise entre a et b.



Corollaire1* :** Si f est une fonction *continue* et ***strictement *monotone* sur un intervalle $[a;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution ***unique*** dans $]a;b[$.

Interprétation : La droite (D): $y=k$ coupe la courbe de f en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b.



Corollaire2* :** Si f est une fonction *continue* , ***strictement *monotone* sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution ***unique*** dans l'intervalle $]a;b[$.

Interprétation : la courbe de la fonction f coupe l'axe des **abscisses** en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b.

Méthode d'encadrement d'une solution par *dichotomie*

5) *Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle*

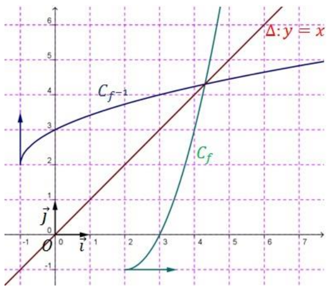
Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I **et** $J=f(I)$.

La fonction **réciproque** de la fonction f est la fonction notée f^{-1} définie sur J à valeurs dans I, telle que :

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \quad \textit{avec} \quad x\in J \ \textit{ et } \ y\in I .$$

Corollaires* :** Si f est ***continue et ***strictement monotone*** sur un intervalle I, alors :

1) f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur $J=f(I)$ à valeurs dans I
2) $(\forall x\in I); f^{-1}(f(x))=x$ *et* $(\forall y\in J); f(f^{-1}(y))=y$.
3) La fonction f^{-1} est continue et strictement monotone sur $J=f(I)$.
   (de même sens de monotonie que k).
4) Dans un repère orthonormé, $(C_{f^{-1}})$ et sont symétriques par rapport à la première bissectrice. (la droite d'équation $y=x$).



Théorème(important): Si f une fonction ***continue et strictement monotone*** sur un intervalle I et $k\in f(I)$

Alors l'équation $f(x) = k$ admet une ***unique solution*** dans I.

III) Dérivabilité d'une fonction.

1) Dérivabilité d'une fonction en un point.

Définition1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$. et $\boldsymbol{a}$ un élément de $\boldsymbol{I}$.
On dit que f est dérivable en $\boldsymbol{a}$, s'il existe un nombre réel ℓ tel que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$
Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé de f en $\boldsymbol{a}$ et on le note $f'(a)$.

Définition2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;b[$ avec $b>a$.
On dit que f est dérivable à droite en $\boldsymbol{a}$, s'il existe un nombre réel ℓ tel que: $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$.
Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé à droite en $\boldsymbol{a}$, et on le note $f'_d(a)$.

Propriété : f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ ***si est seulement si*** f est dérivable à droite en $\boldsymbol{a}$, f est dérivable à gauche en $\boldsymbol{a}$ et $f'_d(a)=f'_g(a)$

Interprétation géométrique du nombre dérivé.

1) Si f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ alors (C_f) admet une tangente en $A(a;f(a))$ d'équation: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2) Si f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ alors $x\mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est la fonction affine tangente à f au point $\boldsymbol{a}$.

3) Si f est dérivable à droite en $\boldsymbol{a}$ alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.

4) Si f est dérivable à gauche en $\boldsymbol{a}$ alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.

5) Si f est dérivable à droite en $\boldsymbol{a}$ et à gauche en $\boldsymbol{a}$ et $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ alors $A(a;f(a))$ est un **point anguleux**.

6) Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en $\boldsymbol{a}$, Cependant, la courbe admet au point d'abscisse $\boldsymbol{a}$ une demi-tangente verticale.

2) Dérivabilité sur un intervalle - Fonction dérivée d'une fonction.

Définition: Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle $\boldsymbol{I}$.

- On dit que $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ si elle est dérivable en tout réel $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{I}$. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{I}$ associe le nombre dérivé de f en $\boldsymbol{x}$ est appelée ***<u>fonction dérivée</u>*** de $\boldsymbol{f}$ et se note f'.
- On dit que $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $[a;b]$ si elle est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à droite en $\boldsymbol{a}$ **et** dérivable à gauche en $\boldsymbol{b}$.

Propriétés : Toute fonction **polynôme** est dérivable sur **IR** .

- Toute fonction **rationnelle** est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les deux fonctions ***sin*** et ***cos*** sont dérivables sur **IR**.
- La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Théorème (***<u>Dérivation d'une fonction composée</u>***) :
Si $\boldsymbol{u}$ est une fonction définie et dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{v}$ une fonction définie et dérivable sur $\boldsymbol{J}$ tel que $\boldsymbol{u(I)\subset J}$, alors $\boldsymbol{v\circ u}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et on a : $(\forall x\in I);\ (v\circ u)'(x)=v'(u(x))\times u'(x)$

Théorème (***<u>Dérivation d'une fonction réciproque</u>***) :
Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{a\in I}$.

- Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et $(\forall x\in I);\ f'(x)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $J=f(I)$ et on a :

$(\forall x\in J);\ (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ et si $f'(a)\neq 0$ alors $(f^{-1})'(f(a))=\dfrac{1}{f'(a)}$

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel alors :

Opérations sur les fonctions dérivées		*Dérivées des fonctions usuelles*	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	k	0
$\lambda.u(x)$	$\lambda.u'(x)$	ax	a
$u(x)\times v(x)$	$u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$	ax^n	$n.ax^{n-1}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$u\circ v(x)$	$u'(v(x))\times v'(x)$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$(u(x))^n$	$n.(u(x))^{n-1}\times u'(x)$	$\tan x$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) *Applications de la fonction dérivée.*

- ***Dérivée et variations.*** Théorèmes admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $(\forall x\in I); f'(x)\geq 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)\leq 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)> 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)< 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I
- Si $(\forall x\in I); f'(x)= 0$, alors la fonction f est constante sur I.

Remarque : Si $(\forall x\in I); f'(x)\geq 0$ et f' s'annule en des points isolés alors la fonction f est **strictement croissante** sur I

- ***Extremums d'une fonction.***

Propriété : f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.

- Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f sur I.

Remarque : Si $f'(a)=0$ et f' ne change pas de signe, alors $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

- ***Concavité et dérivée seconde***

Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. et (C_f) sa courbe représentative.

- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives **(convexe)**, s'elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives **(concave)**, s'elle est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si $(\forall x\in I); f''(x)\geq 0$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.
- Si $(\forall x\in I); f''(x)\leq 0$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.
- Si $f''(a)=0$ et f'' change de signe, alors $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

IV) Les branches infinies

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$	La droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$	La droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à (C_f).
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$	La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty$ → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ → $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=...$
  - ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$
  - b → (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

V) Axe de symétrie - Centre de symétrie

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que la droite $(\Delta): x=a$ est un axe de symétrie de si pour tout x de D on a :

$(2a-x)\in D$ *et* $f(2a-x)=f(x)$

On dit que le point $I(a;b)$ est un centre de symétrie de si pour tout x de D on a :

$(2a-x)\in D$ *et* $f(2a-x)=2b-f(x)$

VI) Fonction paire - Fonction impaire

On dit que f est une fonction paire : Si pour tout x de D_f on a : $-x\in D_f$ *et* $f(-x)=f(x)$

Remarque : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On dit que f est une fonction impaire : Si pour tout x de D_f on a: $-x\in D_f$ *et* $f(-x)=-f(x)$

Remarque : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

VII) Fonction périodique

On dit que f est une fonction périodique s'il existe un réel positif T tel que : pour tout x de D_f on a:

$(x+T)\in D_f$ *et* $f(x+T)=f(x)$ (T est appelé une période de la fonction f)

VIII) Position relative d'une courbe et d'une droite

Pour étudier la position relative d'une courbe et d'une droite $(\Delta): y=ax+b$ sur un intervalle I, on doit étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$ sur I.

- *si* $(\forall x\in I);\ f(x)-(ax+b)>0$, alors est strictement au-dessus de (Δ) sur I.
- *si* $(\forall x\in I);\ f(x)-(ax+b)<0$, alors est strictement au-dessous de (Δ) sur I.
- Les solutions de l'équation $f(x)-(ax+b)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de et (Δ).

IX) Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Définition : $\boldsymbol{a}$ désignant un réel positif et $\boldsymbol{n}$ un entier naturel non nul.

On appelle racine **n**$^{\text{ième}}$ de $\boldsymbol{a}$ le réel positif noté $\sqrt[n]{a}$ tel que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Propriétés : Pour tous réels x et y positifs et pour tous entiers naturels $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ on a :

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la fonction **réciproque** de la fonction $x \mapsto x^n$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ / $y \neq 0$

Remarque. Les règles de calculs sur les ***racines n***$^{\text{ième}}$ sont les mêmes que celles sur les racines carrées.

X) Puissance d'exposant rationnel d'un réel strictement positif.

Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel tel que : $r = \dfrac{p}{q}$ *avec* $(p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On remarque que : $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^{\frac{p}{q}\times q} = x^p$ ***et*** $\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q = x^p$ ***donc*** $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tous nombres rationnels $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ on a :

- $x^n \times y^n = (xy)^n$
- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

Remarque. Les règles de calculs sur les exposants rationnels sont les mêmes que celles sur les exposants entiers.