Calcul d'intégral

Définition

Soient f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I et a et b deux éléments de I

- L'intégrale de f de a à b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b kdx = k(b-a)$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (la linéarité)
- $\int_a^b Kf(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$

L'intégrale et l'ordre

- $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

La valeur moyenne

f une fonction continue sur I et a et b deux élément de I tel que $b > a$

- Il existe un nombre c de $[a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
- Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ appelé la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

Intégration par parties

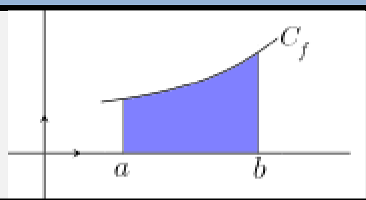
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

- Le choix de u (fonction à dériver) se fait selon l'ordre de L vers S

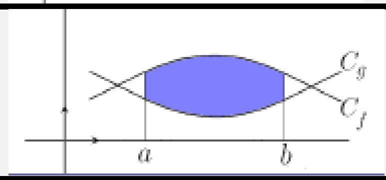
L	P	E	S
ln	polynôme	exp	sin ; cos ; tan

Calcul des aires

- L'air du domaine délimité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est : $\left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right) ua$
- ua est l'unité de l'air $\quad ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



- L'air du domaine délimité par (C_f) et (C_g) et les droites $x = a$ et $x = b$ est $\left(\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx\right) ua$



Calcul des volumes

- Le volume du solide engendré par la rotation de (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur $[a,b]$ est donné par $\left(\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx\right) \times uv$
- uv est l'unité de volume $\quad uv = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$